UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

QUATRIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HALPHEN, M. LEVY, A. MANNHEIM, E. PICARD, H. POINCARÉ, H. RESAL.

TOME QUATRIÈME. — ANNÉE 1888.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1888

(Tous droits réservés.)

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s4journaldemat04liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur le mouvement d'un solide dans un liquide;

PAR M. G.-H. HALPHEN.

Tous les géomètres connaissent la belle application qui, dans l'Ouvrage de Sir William Thomson et Tait, a été faite du principe de Hamilton au problème du mouvement d'un solide dans un liquide indéfini, et le système de six équations différentielles donné par M. Kirchhoff pour la solution de ce problème. En supposant qu'aucune force accélératrice n'agisse sur le corps solide et sur le liquide où il est plongé, M. Kirchhoff en a déduit un cas, celui par exemple où le solide est homogène et de révolution, dans lequel les équations différentielles conduisent à des quadratures elliptiques, et ce cas a reçu depuis une certaine extension, comme on peut voir dans un Mémoire de Clebsch. Par l'emploi des fonctions elliptiques, il existe donc un cas où ce beau problème est susceptible d'une solution complète, où tous les éléments du mouvement peuvent être exprimés en fonction explicite du temps [1].

[1] Un autre cas, signalé par Clebsch, donne lieu aussi à une solution com-

C'est cette application des fonctions elliptiques que j'ai en vue d'exposer dans le présent Mémoire, application bien propre à marquer, vu la complication du problème, les services que l'on doit attendre de l'emploi, de plus en plus propagé, des fonctions elliptiques.

L'attention a été appelée récemment [1] sur un admirable théorème trouvé par Jacobi et d'après lequel le mouvement d'un corps grave de révolution, suspendu par un point de son axe, se décompose en deux mouvements *à la Poinsot*. C'est dans les formules elliptiques représentant le mouvement du corps grave que Jacobi a su lire cette décomposition merveilleuse, et certes il est difficile de ne pas admirer la perspicacité dont a fait preuve, dans cette occasion, le célèbre géomètre.

En étudiant l'analyse de Jacobi, j'ai été conduit à lui trouver une extension inattendue; les formules qui représentent le mouvement d'un solide dans un liquide font apparaître aussi une décomposition analogue. J'exposerai ici ce résultat après avoir donné les formules du mouvement. Mais, pour pouvoir me suivre jusque-là, il faut que le lecteur connaisse la représentation elliptique des mouvements à la Poinsot et la composition de ces mouvements. De là l'obligation d'exposer cette théorie dans des paragraphes séparés par où je commencerai ce Mémoire, avant d'entamer le problème du mouvement d'un solide dans un liquide. Je réduirai d'ailleurs ces préliminaires à leurs parties essentielles pour le but que je poursuis.

I. — Sur une représentation elliptique des cosinus des neuf angles que font entre elles les arêtes de deux trièdres trirectangles.

Soit u un argument elliptique quelconque. La fonction $(\wp u - e_\alpha)$ est, comme on sait, un carré parfait, c'est-à-dire le carré d'une fonction uniforme (la notation e_α désigne, rappelons-le, la valeur de la fonc-

---

plète au moyen des fonctions hyperelliptiques. Cette solution a été développée par M. H. Weber dans les *Mathematische Annalen*, t. XIV, p. 173.

[1] Par M. Darboux et par moi-même dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. C, p. 1065, et t. CI, p. 11; 1885. (*Voir* aussi *Cours de Mécanique* de M. Despeyrous, *avec des Notes* par M. Darboux, t. II, p. 537.)

tion p pour une *demi-période* quelconque ω_α, en sorte que $e_\alpha = p\omega_\alpha$). Si l'on prend donc deux arguments u et v, la fonction $\frac{pu - e_\alpha}{pv - e_\alpha}$ est aussi un carré parfait P^2.

D'autre part, la fonction $1 - P^2 = \frac{pv - pu}{pv - e_\alpha}$ est décomposable en deux facteurs uniformes, différents de $1 \pm P$. Soient Q, R ces deux facteurs; ils donnent lieu à l'égalité $P^2 + QR = 1$, et les trois fonctions P, Q, R peuvent servir à représenter trois quantités liées par une relation quadratique. Elles peuvent donc servir à représenter les cosinus des angles qu'une droite fait avec trois axes rectangulaires.

Composons ces trois facteurs, affectons Q et R de coefficients arbitraires C et $\frac{1}{C}$, qui ne troublent pas la relation quadratique, puis, pour la symétrie, changeons v en $(v - \omega_\alpha)$, et nous aurons les expressions suivantes pour les trois cosinus d'une droite a avec trois axes x, y, z.

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \cos az &= \frac{\sigma(u-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\alpha)}{\sigma u\,\sigma v}\, e^{\eta_\alpha v + u - \omega_\alpha}, \\ \cos ax + i\cos ay &= C\,\frac{\sigma(u+v-\omega_\alpha)\,\sigma\omega_\alpha}{\sigma u\,\sigma v}\, e^{\eta_\alpha(v+u-\omega_\alpha)}, \\ \cos ax - i\cos ay &= \frac{1}{C}\,\frac{\sigma(u-v+\omega_\alpha)\,\sigma\omega_\alpha}{\sigma u\,\sigma v}\, e^{\eta_\alpha(v-u-\omega_\alpha)}. \end{aligned}\right.$$

En employant les fonctions σ à indices et la notation

$$(2)\qquad U_\alpha = \sigma\omega_\alpha\, e^{-\frac{1}{2}\eta_\alpha\omega_\alpha},$$

on peut encore écrire ainsi ces formules

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \cos az &= U_\alpha^2\,\frac{\sigma_\alpha u\,\sigma_\alpha v}{\sigma u\,\sigma v}, \\ \cos ax + i\cos ay &= -\,C U_\alpha^2\,\frac{\sigma_\alpha(u+v)}{\sigma u\,\sigma v}, \\ \cos ax - i\cos ay &= \frac{1}{C}\,U_\alpha^2\,\frac{\sigma_\alpha(u-v)}{\sigma u\,\sigma v}. \end{aligned}\right.$$

Prenons maintenant des formules toutes semblables pour exprimer

les cosinus des angles que fait une seconde droite b avec les mêmes axes, en conservant les mêmes quantités C, u, v, et changeant seulement l'indice α. Ainsi

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \cos bz &= \frac{\sigma(u-\omega_\beta)\,\sigma(v-\omega_\beta)}{\sigma u\,\sigma v}\,e^{\eta_\beta(v+u-\omega_\beta)},\\ \cos bx + i\cos by &= \mathrm{C}\,\frac{\sigma(u+v-\omega_\beta)\,\sigma\omega_\beta}{\sigma u\,\sigma v}\,e^{\eta_\beta(v+u-\omega_\beta)},\\ \cos bx - i\cos by &= \frac{1}{\mathrm{C}}\,\frac{\sigma(u-v+\omega_\beta)\,\sigma\omega_\beta}{\sigma u\,\sigma v}\,e^{\eta_\beta(v-u-\omega_\beta)}. \end{aligned}\right.$$

Les deux droites a et b sont rectangulaires.

Pour le prouver, faisons usage de la formule de décomposition en éléments simples relative à une fonction doublement périodique de deuxième espèce ayant un seul pôle, mais double. Je ne renvoie pas le lecteur, pour la connaissance de cette formule, soit à tel Mémoire de M. Hermite, inventeur de ces décompositions, soit à un Ouvrage sur les fonctions elliptiques. Pour retrouver, sans aucun secours, les formules de ce genre, il suffit d'en connaître le principe.

Une fonction doublement périodique $\mathrm{F}(u)$ de deuxième espèce, avec un seul infini mais double, a pour expression générale, u désignant l'argument variable, et un coefficient constant arbitraire étant omis,

$$\mathrm{F}(u) = \frac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)}{\sigma^2 u}\,e^{\rho u}.$$

L'élément simple correspondant, à résidu unité, est le suivant

$$\Phi(u) = -\frac{\sigma(u-a_1-a_2)}{\sigma(a_1+a_2)\,\sigma u}\,e^{\rho u},$$

et la décomposition donne la formule

$$\frac{1}{\sigma a_1\,\sigma a_2}\,\mathrm{F}(u) = -\Phi'(u) + (\rho - \zeta a_1 - \zeta a_2)\,\Phi(u).$$

Soient d'abord

$$a_1 = \omega_\alpha, \qquad a_2 = \omega_\beta, \qquad \rho = \zeta\omega_\alpha + \zeta\omega_\beta = \eta_\alpha + \eta_\beta,$$

et désignons par $\Psi(u)$ ce que devient ainsi $\Phi(u)$, sauf un facteur constant,

$$(5)\qquad \Psi(u) = \frac{\sigma(u-\omega_\alpha-\omega_\beta)}{\sigma u}\, e^{(\eta_\alpha+\eta_\beta)u}.$$

Nous aurons

$$(6)\qquad \frac{\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma\omega_\alpha\,\sigma\omega_\beta}\,\frac{\sigma(u-\omega_\alpha)\,\sigma(u-\omega_\beta)}{\sigma^2 u}\, e^{(\eta_\alpha+\eta_\beta)u} = \Psi'(u).$$

Soient, en second lieu,

$$a_1 = v-\omega_\beta,\qquad a_2 = \omega_\alpha - v,\qquad \rho = \eta_\alpha - \eta_\beta;$$

l'élément simple $\Phi(u)$ est alors

$$\Phi(u) = -\frac{\sigma(u-\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma(\omega_\alpha-\omega_\beta)\,\sigma u}\, e^{(\eta_\alpha-\eta_\beta)u},$$

et il ne diffère de $\Psi(u)$ que par un facteur constant, car on a effectivement

$$\Phi(u) = -\frac{1}{\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}\,\Psi(u).$$

La formule de décomposition ci-dessus donne donc

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma(v-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\beta)}\,\frac{\sigma(u-v+\omega_\beta)\,\sigma(u+v-\omega_\alpha)}{\sigma^2 u}\, e^{(\eta_\alpha-\eta_\beta)u}\\ &\quad = -\Psi'(u) + \left[\zeta(v-\omega_\beta) - \zeta(v-\omega_\alpha) + \eta_\beta - \eta_\alpha\right]\Psi(u).\end{aligned}\right.$$

Échangeons les indices α et β, ajoutons membre à membre la dernière égalité et celle que nous obtenons par cet échange, puis remplaçons $\Psi'(u)$ par son expression (6). Il vient ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma(v-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\beta)}\,&\Big[\sigma(u-v+\omega_\beta)\,\sigma(u+v-\omega_\alpha)\,e^{(\eta_\alpha-\eta_\beta)u}\\ &+\sigma(u-v+\omega_\alpha)\,\sigma(u+v-\omega_\beta)\,e^{(\eta_\beta-\eta_\alpha)u}\Big]\\ &+\frac{2}{\sigma\omega_\alpha\,\sigma\omega_\beta}\,\sigma(u-\omega_\alpha)\,\sigma(u-\omega_\beta)\,e^{(\eta_\alpha+\eta_\beta)u} = 0.\end{aligned}$$

D'après les égalités (1, 4), ceci revient à

$$(\cos bx - i\cos by)(\cos ax + i\cos ay)$$
$$+ (\cos bx + i\cos by)(\cos ax - i\cos ay) + 2\cos az\cos bz = 0$$

ou bien

$$\cos bx\cos ax + \cos by\cos ay + \cos az\cos bz = 0.$$

Ainsi est prouvée la perpendicularité des deux droites a et b.

Comme il y a trois demi-périodes distinctes, nous pouvons prendre une troisième droite c en définissant les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes x, y, z par des formules toutes pareilles, où seulement on mettra la troisième demi-période ω_γ. Cette droite c sera perpendiculaire aux droites a et b. Donc *les cosinus des neuf angles que les arêtes d'un trièdre trirectangle a, b, c font avec les arêtes d'un autre trièdre trirectangle x, y, z peuvent être représentés par les formules suivantes où* C, u, v *sont arbitraires et* ω_α, ω_β, ω_γ *sont trois demi-périodes distinctes* (c'est-à-dire dont les différences deux à deux ne sont pas des périodes), *savoir les formules* (1) *et celles qu'on en déduit en changeant a et α en b et β ou en c et γ* [1].

Chacune des six droites a, b, c et x, y, z est ici affectée d'un sens, considéré comme positif. Elles forment, si l'on veut, deux systèmes d'axes rectangulaires. En faisant correspondre entre eux ces axes deux à deux, a avec x, b avec y, c avec z, on peut rencontrer deux cas : ou bien les deux systèmes sont *congruents*, c'est-à-dire qu'on peut transporter l'un d'eux de telle sorte que les axes correspondants coïncident en position et en sens, ou bien ils sont *incongruents*. La distinction des deux cas se fait par la quantité

$$(8) \qquad \frac{\cos ax\cos by - \cos ay\cos bx}{\cos cz} = \varepsilon,$$

qui est égale à $+1$ dans le premier cas, à -1 dans le second.

---

[1] Les quantités C, u, v sont *complexes;* dans chacune d'elles cependant il n'y a qu'une seule arbitraire. Pour abréger, je ne place pas ici l'étude des conditions sous lesquelles les formules (1) fournissent des angles réels, étude qui conduit à la conclusion que je viens de dire. La nature des quantités C, u, v apparaîtra plus loin, d'une autre manière.

Examinons quel est ε dans le mode de représentation ci-dessus. A cet effet, après avoir, dans la relation (7), échangé α et β, comme précédemment, retranchons les deux égalités membre à membre, au lieu de les ajouter. C'est alors le terme $\Psi'(u)$ qui disparaît au second membre, et le terme suivant qui se conserve. Transformons d'abord la quantité entre crochets : c'est une fonction doublement périodique de v; exprimons-la en produit de facteurs, ce qui est aisé, ses racines étant évidentes. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
&\zeta(v-\omega_\beta)-\zeta(v-\omega_\alpha)+\eta_\beta-\eta_\alpha\\
&\quad=\frac{\sigma(\omega_\alpha-\omega_\beta)}{\sigma\omega_\alpha\,\sigma\omega_\beta}\,\frac{\sigma v\,\sigma(v-\omega_\alpha-\omega_\beta)}{\sigma(v-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\beta)}\\
&\quad=-\,e^{-2\eta_\beta\omega_\alpha}\,\frac{\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma\omega_\alpha\,\sigma\omega_\beta}\,\frac{\sigma v\,\sigma(v-\omega_\alpha-\omega_\beta)}{\sigma(v-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\beta)}.
\end{aligned}$$

De là résulte, d'après (1, 4),

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
&\cos ax\cos by-\cos ay\cos bx\\
&\quad=-\frac{1}{i}\,e^{\eta_\alpha\omega_\beta-\eta_\beta\omega_\alpha}\,\frac{\sigma(u-\omega_\alpha-\omega_\beta)\,\sigma(v-\omega_\alpha-\omega_\beta)}{\sigma u\,\sigma v}\,e^{(\eta_\alpha+\eta_\beta)(u+v-\omega_\alpha-\omega_\beta)}.\\
&\quad=-\frac{1}{i}\,e^{\eta_\alpha\omega_\beta-\eta_\beta\omega_\alpha}\,U^2_{\alpha+\beta}\,\frac{\sigma_{\alpha+\beta}u\,\sigma_{\alpha+\beta}v}{\sigma u\,\sigma v}.
\end{aligned}\right.$$

Les trois demi-périodes ω_α, ω_β, ω_γ étant distinctes, la fonction $\sigma_{\alpha+\beta}$ reproduit σ_γ. De même $U^2_{\alpha+\beta}$ reproduit $\pm U^2_\gamma$; le signe dépend du choix de ces demi-périodes, qu'on peut altérer en y ajoutant à volonté des périodes entières. Pour fixer les idées, *je supposerai désormais la somme des trois demi-périodes nulle*. Alors $U^2_{\alpha+\beta}$ reproduit U^2_γ. Le second membre (9) reproduit alors $\cos cz$, multiplié par le facteur

$$\varepsilon=-\frac{1}{i}\,e^{\eta_\alpha\omega_\beta-\eta_\beta\omega_\alpha}.$$

On sait que l'exposant de e, dans cette formule, est toujours un multiple impair de $\frac{i\pi}{2}$. Soit donc

$$\eta_\alpha\omega_\beta-\eta_\beta\omega_\alpha=(2k+1)\,\frac{i\pi}{2};$$

le caractère de congruence des axes est défini par l'égalité

$$\varepsilon = (-1)^{k+1}.$$

II. — Sur la décomposition d'une somme en produit.

Parmi les égalités qui ont lieu entre les neuf cosinus, prenons celle-ci

$$\sum_a (\cos ax + i\cos ay)(\cos ax - i\cos ay) = 2,$$

où le signe sommatoire indique qu'on devra successivement remplacer a par a, b et c.

Remplaçons les quantités $\cos ax \pm i\cos ay$ et les similaires par leurs expressions (1), et nous aurons

$$\sum_\omega \sigma(u+v-\omega)\,\sigma(u-v+\omega)\,\sigma^2\omega\, e^{2\eta(v-\omega)} = 2\,\sigma^2 u\,\sigma^2 v,$$

où le signe sommatoire indique que ω devra être successivement remplacé par les trois demi-périodes ω_α, ω_β, ω_γ, en même temps que η par η_α, η_β, η_γ.

En mettant v et v_1 au lieu de $v+u$ et $v-u$, on peut encore écrire

$$(10)\qquad \sum_\omega \sigma(v-\omega)\,\sigma(v_1-\omega)\,\sigma^2\omega\, e^{\eta(v+v_1-2\omega)} = -2\,\sigma^2\frac{v+v_1}{2}\,\sigma^2\frac{v-v_1}{2},$$

cas particulier d'une formule plus générale, que nous allons établir. Prenons la fonction

$$(11)\qquad \varphi(u, v, w) = \frac{\sigma(u-v-w)\,\sigma(u-w)}{\sigma^2 u\,\sigma(v-w)\,\sigma w},$$

qui diffère seulement par les notations et par un facteur constant de la fonction doublement périodique de seconde espèce $F(u)$, envisagée plus haut, où l'on suppose $\rho = 0$.

L'élément simple s'écrit ici

$$\Phi(u) = -\frac{\sigma(u-v)}{\sigma u \sigma v},$$

et l'on a

$$(11\,a) \qquad \varphi(u, v, w) = -\Phi'(u) - [\zeta(v-w) + \zeta w]\,\Phi(u).$$

Si, dans cette formule, on multiplie les deux membres par cette fonction de l'argument v

$$f(v) = \sigma(v-w)\,e^{v\zeta w},$$

on pourra écrire le résultat sous la forme

$$(11\,b) \qquad f(v)\,\varphi(u, v, w) = -f(v)\,\Phi'(u) - f'(v)\,\Phi(u).$$

Soit A la somme (10) et soit aussi S la somme obtenue en prenant successivement pour w les trois demi-périodes et multipliant chacune des fonctions $\varphi(u, v, \omega)$ par le terme correspondant de la somme A: on aura

$$S = \sum_{\omega} \sigma(v-\omega)\,\sigma(v_1-\omega)\,\sigma^2\omega\, e^{\eta_1 v + v_1 - 2\omega)}\,\varphi(u, v, \omega).$$

Dans cette somme, chaque multiplicateur de φ a la forme supposée ci-dessus pour f, sauf un facteur constant. On a donc, d'après (11 b),

$$S = -A\Phi'(u) - \frac{dA}{dv}\Phi(u).$$

Si maintenant l'on met, au lieu de A, le second membre (10), il vient

$$S = 2\sigma^2\frac{v+v_1}{2}\,\sigma^2\frac{v-v_1}{2}\left[\Phi'(u) + \left(\zeta\frac{v+v_1}{2} + \zeta\frac{v-v_1}{2}\right)\Phi(u)\right],$$

ou bien, d'après (11 a),

$$S = -2\sigma^2\frac{v+v_1}{2}\,\sigma^2\frac{v-v_1}{2}\,\varphi\left(u, v, \frac{v-v_1}{2}\right).$$

Remettant enfin, pour S et pour $\wp$, les formes de définition et chassant les dénominateurs, j'obtiens la formule cherchée

$$\sum_{\omega} \sigma(u-\omega)\,\sigma(u-v+\omega)\,\sigma(v_1-\omega)\,\sigma\omega\, e^{\eta(v-v_1-2\omega)}$$
$$= -2\,\sigma\frac{v+v_1}{2}\,\sigma\frac{v-v_1}{2}\,\sigma\left(u-\frac{v+v_1}{2}\right)\sigma\left(u-\frac{v-v_1}{2}\right),$$

dont l'aspect est plus symétrique si l'on écrit u, v, w, au lieu de u, $v-u$, v_1 :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\omega} \sigma(u-\omega)\,\sigma(v-\omega)\,\sigma(w-\omega)\,\sigma\omega\, e^{\eta(u+v+w-2\omega)} \\ &\quad = 2\prod \sigma\frac{u\pm v\pm w}{2}; \end{aligned}\right.$$

le produit, au second membre, est composé avec les quatre facteurs obtenus par les diverses combinaisons des signes $\pm$.

III. — Composition des trièdres trirectangles.

Soient trois systèmes d'axes rectangulaires a, b, c ; x_0, y_0, z_0 ; x_1, y_1, z_1. On donne les cosinus des angles que font les axes a, b, c avec x_0, y_0, z_0 et avec x_1, y_1, z_1, et l'on demande les cosinus des angles que font entre eux les axes x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1. C'est ce problème que, pour abréger, j'appelle *problème de la composition des trièdres trirectangles*, problème résolu par des formules élémentaires de Géométrie analytique, mais qu'il s'agit de résoudre explicitement au moyen de la représentation elliptique précédente. On suppose les cosinus exprimés par les formules ci-dessus au moyen des mêmes fonctions elliptiques dans les deux cas, mais avec des quantités C_0, u_0, v_0 pour les axes x_0, y_0, z_0, et des quantités différentes C_1, u_1, v_1 pour les axes x_1, y_1, z_1.

Pour résoudre le problème, je chercherai les expressions elliptiques des quantités suivantes :

$$(13)\quad \cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1, \qquad \cos z_1 x_0 + i\cos z_1 y_0, \qquad \cos z_1 z_0.$$

Les conjuguées des deux premières se déduisent par deux relations évidentes, savoir :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &(\cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1)(\cos z_0 x_1 - i\cos z_0 y_1)\\ &\quad = (\cos z_1 x_0 + i\cos z_1 y_0)(\cos z_1 x_0 - i\cos z_1 y_0)\\ &\quad = 1 - \cos^2 z_1 z_0, \end{aligned}\right.$$

et les autres cosinus s'obtiennent, sans aucune ambiguïté, quand on sait si les deux systèmes d'axes sont congruents ou incongruents. Pour ce but, on a, en effet, l'équation suivante, qui se conclut des relations analogues à la relation (8), et qui équivaut à quatre équations distinctes, quand on donne à i et à j séparément les valeurs

$$i = \pm\sqrt{-1}, \qquad j = \pm\sqrt{-1},$$

$$\begin{aligned} &\cos x_0 x_1 + i\cos x_0 y_1 + j\cos y_0 x_1 + ij\cos y_0 y_1\\ &\quad = -\frac{(\cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1)(\cos z_1 x_0 + j\cos z_1 y_0)}{\varepsilon ij - \cos z_0 z_1}. \end{aligned}$$

La quantité ε est ± 1, suivant que les axes x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1 sont congruents ou non. Mais ici ces deux systèmes d'axes présentent un même caractère de congruence ou d'incongruence par rapport à a, b, c; ils sont donc congruents entre eux, et ε devra être pris égal à $+1$.

On voit donc que les trois quantités (13) déterminent sans ambiguïté les positions respectives des deux systèmes d'axes, moyennant la connaissance du caractère figuré par le signe de ε, lequel est ici le signe *plus*.

D'après une formule élémentaire de Géométrie analytique, on a

$$\cos z_0 x_1 \pm i\cos z_0 y_1 = \sum_a \cos a z_0 (\cos a x_1 \pm i\cos a y_1).$$

D'après les formules (1), nous aurons, en prenant le signe *plus*.

$$\begin{aligned} &\cos z_0 x_1 + i\cos z_0 y_1\\ &\quad = \frac{C_1}{\sigma u_0 \sigma v_0 \sigma u_1 \sigma v_1} \sum_\omega \sigma(u_0 - \omega)\sigma(v_0 - \omega)\sigma(u_1 + v_1 - \omega)\sigma\omega\, e^{\eta(v_0 + u_0 + v_1 + u_1 - 2\omega)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la formule de sommation (12),

$$(15)\quad \cos z_0 x_1 + i \cos z_0 y_1 = \frac{2C_1}{\sigma u_0 \sigma v_0 \sigma u_1 \sigma v_1} \prod \sigma \frac{u_1 + v_1 \pm u_0 \pm v_0}{2}.$$

Semblablement, en prenant le signe *moins*,

$$(16)\quad \cos z_0 x_1 - i \cos z_0 y_1 = -\frac{2}{C_1 \sigma u_0 \sigma v_0 \sigma u_1 v_1} \prod \sigma \frac{u_1 - v_1 \pm u_0 \pm v_0}{2}.$$

De même, $\cos z_1 x_0 \pm i \cos z_1 y_0$ s'expriment par des formules toutes semblables : il suffit d'échanger les indices 0 et 1. On remarquera que l'on retrouve, par cet échange, les huit mêmes facteurs, mais groupés différemment, ce qui constitue, d'après la double égalité (14), une seule et même expression pour $1 - \cos^2 z_0 z_1 = \sin^2 z_0 z_1$, savoir :

$$\sin^2 z_0 z_1 = -\frac{4}{(\sigma u_0 \sigma v_0 \sigma u_1 \sigma v_1)^2} \prod \sigma \frac{u_0 \pm u_1 \pm v_0 \pm v_1}{2}.$$

Pour parvenir à l'expression de $\cos z_0 z_1$, transformons d'abord cette dernière formule au moyen de la relation fondamentale

$$(17)\qquad \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v} = \wp v - \wp u.$$

Posant

$$\wp \frac{u_0 + u_1}{2} = \alpha, \qquad \wp \frac{u_0 - u_1}{2} = \alpha',$$

$$\wp \frac{v_0 + v_1}{2} = \beta, \qquad \wp \frac{v_0 - v_1}{2} = \beta',$$

nous pouvons écrire

$$\sin^2 z_0 z_1 = -4 \frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \beta')(\alpha' - \beta)(\alpha' - \beta')}{(\alpha - \alpha')^2 (\beta - \beta')^2},$$

$$\cos^2 z_0 z_1 = \frac{(\alpha - \alpha')^2 (\beta - \beta')^2 + 4(\alpha - \beta)(\alpha - \beta')(\alpha' - \beta)(\alpha' - \beta')}{(\alpha - \alpha')^2 (\beta - \beta')^2}.$$

En tenant compte de l'identité

$$(\alpha - \alpha')(\beta - \beta') = (\alpha - \beta)(\alpha' - \beta') - (\alpha - \beta')(\alpha' - \beta),$$

on voit que le numérateur de $\cos^2 z_0 z_1$ est le carré de

$$(\alpha - \beta)(\alpha' - \beta') + (\alpha - \beta')(\alpha' - \beta).$$

En extrayant la racine carrée, il reste seulement à fixer le signe, qui est entièrement déterminé, puisque l'on pourrait obtenir aussi ce même cosinus par la formule

$$\cos z_0 z_1 = \sum_a \cos a z_0 \cos a z_1.$$

Le signe se détermine immédiatement si l'on observe que les deux axes z_0 et z_1 coïncident quand on a $u_0 = u_1$, $v_0 = v_1$. En ce cas, α' et β' sont infinis, et $\cos z_0 z_1$ doit se réduire à $+1$. On a donc

$$(18) \qquad \cos z_0 z_1 = -\frac{(\alpha - \beta)(\alpha' - \beta') + (\alpha - \beta')(\alpha' - \beta)}{(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')}.$$

Par ces formules (15), (16), (18), le problème de la composition des trièdres trirectangles est résolu.

Voici quelques formules intéressantes ou utiles qui se rattachent aux précédentes. A cause de l'identité

$$\frac{(\alpha - \beta)(\alpha' - \beta')}{(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')} = \frac{(\alpha - \beta')(\alpha' - \beta)}{(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')} + 1,$$

on a

$$(19) \qquad \begin{cases} 1 + \cos z_0 z_1 = -2\dfrac{(\alpha - \beta')(\alpha' - \beta)}{(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')}, \\ 1 - \cos z_0 z_1 = +2\dfrac{(\alpha - \beta)(\alpha' - \beta')}{(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')}. \end{cases}$$

Par le moyen de la relation fondamentale (17), on transforme ces expressions en produits de fonctions σ, par exemple,

$$1 + \cos z_0 z_1 = -\frac{2}{\sigma u_0 \sigma v_0 \sigma u_1 \sigma v_1} \prod{}' \sigma \frac{u_0 \pm v_0 \pm u_1 \pm v_1}{2},$$

le produit $\prod'$ comprenant seulement les quatre facteurs où le nombre

des signes *moins* est impair. L'expression de $1 - \cos z_0 z_1$ comprend, au contraire, les quatre facteurs où le nombre des signes *moins* est pair.

Voici encore, pour $\cos z_0 z_1$, une autre forme qui se rencontrera dans l'application que nous avons en vue.

Pour un instant, posons

$$\alpha = \wp a, \qquad \alpha' = \wp a', \qquad \beta = \wp b, \qquad \beta' = \wp b',$$

d'où résulte

$$(20) \qquad \frac{(\alpha - \beta')(\alpha' - \beta)}{(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')} = \frac{\sigma(a+b')\sigma(a-b')\sigma(a'+b)\sigma(a'-b)}{\sigma(a+a')\sigma(a-a')\sigma(b+b')\sigma(b-b')}.$$

Envisageons à part les facteurs

$$\frac{\sigma(a'+b)\sigma(a'-b)}{\sigma(a+a')\sigma(a-a')}$$

comme composant une fonction de a', qui est doublement périodique et que nous décomposons en éléments simples. Nous avons ainsi

$$\frac{\sigma(a'+b)\sigma(a'-b)}{\sigma(a+a')\sigma(a-a')}$$
$$= \frac{\sigma(a-b)\sigma(a+b)}{\sigma 2a}[\zeta(a+a') + \zeta(a-a') - \zeta(a+b) - \zeta(a-b)].$$

Échangeons a' et b', puis divisons les deux égalités membre à membre; nous obtenons

$$\frac{\sigma(a+b')\sigma(a-b')\sigma(a'+b)\sigma(a'-b)}{\sigma(a+a')\sigma(a-a')\sigma(b+b')\sigma(b-b')}$$
$$= -\frac{\zeta(a+a') + \zeta(a-a') - \zeta(a+b) - \zeta(a-b)}{\zeta(a+b') + \zeta(a-b') - \zeta(a+b) - \zeta(a-b)}.$$

D'après l'égalité (20) et l'expression (19) de $1 + \cos z_0 z_1$, nous obtenons, en mettant pour a, a', b, b' leurs valeurs $\frac{u_0 \pm u_1}{2}$, $\frac{v_0 \pm v_1}{2}$,

$$(21) \qquad \cos z_0 z_1 = \frac{2\zeta u_0 + 2\zeta u_1 - \sum \zeta \frac{u_0 + u_1 \pm v_0 \pm v_1}{2}}{\sum \zeta \frac{u_0 + u_1 \pm (v_0 - v_1)}{2} - \sum \zeta \frac{u_0 + u_1 \pm (v_0 + v_1)}{2}}.$$

Cette expression est dissymétrique relativement aux arguments u et v, tandis que les précédentes étaient, au contraire, symétriques. Elle est ici sous la forme que nous rencontrerons naturellement dans notre application, où les arguments u et v joueront des rôles très différents.

IV. — Mouvements a la Poinsot.

Si l'on écrit l'expression de $\cos cz$ sous la forme suivante

$$\cos cz = \frac{\sigma(u+\omega_\gamma)\,\sigma(v+\omega_\gamma)}{\sigma u\,\sigma v}\,e^{-\eta_\gamma(v+u+\omega_\gamma)},$$

on voit que la fonction (5) $\Psi'(u)$ diffère de ce cosinus par un facteur indépendant de u. De même aussi les facteurs du premier membre, dans la relation (6), diffèrent de $\cos az$ et de $\cos bz$ par des facteurs indépendants de u. En considérant ces trois cosinus comme des fonctions de u, on trouve donc qu'ils satisfont à trois équations différentielles déduites de la relation (6) par permutation des indices. Ainsi, cette relation (6) donne immédiatement

$$\frac{\sigma^2 v\,\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma\omega_\alpha\,\sigma\omega_\beta\,\sigma(v-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\beta)}\,e^{-(\eta_\alpha+\eta_\beta)v+\eta_\alpha\omega_\alpha+\eta_\beta\omega_\beta}\cos az\cos bz$$
$$= \frac{\sigma v}{\sigma(v+\omega_\gamma)}\,e^{\eta_\gamma(v+\omega_\gamma)}\,\frac{d\cos cz}{du},$$

ce qui se réduit simplement à

$$(22)\qquad \frac{1}{\cos az\cos bz}\,\frac{d\cos cz}{du} = \frac{\sigma v\,\sigma(v-\omega_\alpha-\omega_\beta)\,\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)\,e^{-\eta_\beta\omega_\alpha-\eta_\alpha\omega_\beta}}{\sigma(v-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\beta)\,\sigma\omega_\alpha\,\sigma\omega_\beta}.$$

Comme on a d'ailleurs

$$\frac{\sigma(\omega_\alpha+\omega_\beta)}{\sigma(\omega_\alpha-\omega_\beta)} = -\,e^{2\eta_\beta\omega_\alpha},$$

on voit que le second membre (22) peut s'écrire

$$-\,e^{\eta_\beta\omega_\alpha-\eta_\alpha\omega_\beta}\,\frac{\sigma v\,\sigma(v-\omega_\alpha-\omega_\beta)\,\sigma(\omega_\alpha-\omega_\beta)}{\sigma(v-\omega_\alpha)\,\sigma(v-\omega_\beta)\,\sigma\omega_\alpha\,\sigma\omega_\beta}.$$

C'est, au premier facteur près, une fonction doublement périodique de v, dont les pôles sont en évidence, avec les résidus ± 1, avec des racines mises également en évidence, et dont la décomposition en éléments simples est immédiate. Quant à l'exponentielle, on a vu plus haut qu'elle est égale à $i\varepsilon$, ε étant le caractère de congruence des axes. Ainsi le second membre (22) peut s'écrire ainsi

$$i\varepsilon[\zeta(v-\omega_\alpha)-\zeta(v-\omega_\beta)+\zeta\omega_\alpha-\zeta\omega_\beta].$$

Par le théorème d'addition des fonctions ζ, on a

$$\zeta(v-\omega_\alpha)-\zeta v+\zeta\omega_\alpha=\frac{1}{2}\frac{p'v}{pv-p\omega_\alpha}=\frac{1}{2}\frac{p'v}{pv-e_\alpha}.$$

En employant pareille formule avec l'indice β au lieu de α, on peut écrire le second membre (22) sous la forme

$$\frac{i\varepsilon}{2}\left(\frac{p'v}{pv-e_\alpha}-\frac{p'v}{pv-e_\beta}\right).$$

Soient désignées par P, Q, R les trois quantités telles que $\frac{i\varepsilon p'v}{2(pv-e_\alpha)}$,

$$-\mathrm{P}=\frac{\varepsilon}{2i}\frac{p'v}{pv-e_\alpha}=\frac{\varepsilon}{i}[\zeta(v-\omega_\alpha)-\zeta v+\eta_\alpha];$$

on a, comme on voit, les trois équations différentielles

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\cos cz}{du}=(\mathrm{P}-\mathrm{Q})\cos az\cos bz,\\[2mm] \dfrac{d\cos az}{du}=(\mathrm{Q}-\mathrm{R})\cos bz\cos cz,\\[2mm] \dfrac{d\cos bz}{du}=(\mathrm{R}-\mathrm{P})\cos cz\cos az,\end{cases}$$

satisfaites par les trois fonctions envisagées. Pour ces équations, on a immédiatement deux intégrales : l'une est la somme des carrés des trois cosinus, l'autre la somme des produits $\mathrm{P}\cos^2 az$. On retrouve aisément ces deux intégrales au moyen des expressions des carrés des

cosinus, si on les écrit ainsi

$$\cos^2 az = \frac{(\mathrm{p}u - e_\alpha)(\mathrm{p}v - e_\alpha)}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}.$$

En effet, $\Sigma \cos^2 az$ est le coefficient de $\frac{1}{\xi}$ dans le développement de la fonction

$$\frac{(\mathrm{p}u - \xi)(\mathrm{p}v - \xi)}{(\xi - e_\alpha)(\xi - e_\beta)(\xi - e_\gamma)},$$

effectué suivant les puissances ascendantes de ξ; et, de même,

$$\Sigma \mathrm{P} \cos^2 az$$

est aussi le coefficient de $\frac{1}{\xi}$ dans le développement analogue de la fonction

$$-\frac{\varepsilon \mathrm{p}'v}{2i} \frac{\mathrm{p}u - \xi}{(\xi - e_\alpha)(\xi - e_\beta)(\xi - e_\gamma)}.$$

Le premier de ces coefficients est l'unité, l'autre est zéro. Ainsi, l'on a

$$\cos^2 az + \cos^2 bz + \cos^2 cz = 1,$$

$$(24) \qquad \mathrm{P} \cos^2 az + \mathrm{Q} \cos^2 bz + \mathrm{R} \cos^2 cz = 0.$$

Généralisant un peu la conception du mouvement donné par Poinsot comme image de celui d'un corps solide qui n'est soumis à aucune force, on a été conduit à envisager le mouvement dans lequel une surface du second degré, fixée en son centre, roule sans glisser sur un de ses plans tangents, avec une vitesse de rotation proportionnelle, à chaque instant, à la longueur du rayon vecteur qui va du centre au point de contact.

Pour le but que je poursuis, il est plus commode de considérer la surface comme fixe et le plan tangent comme mobile. J'appelle donc *mouvement à la Poinsot* celui d'un plan qui roule sans glisser sur une surface du second degré, en restant à une distance constante du centre de cette surface, avec une vitesse de rotation définie, comme je viens de le dire.

Les axes a, b, c de la surface sont alors supposés fixes, et l'on envisage trois axes rectangulaires mobiles x, y, z, liés au plan, ayant leur origine au centre, et dont le dernier z est perpendiculaire à ce plan.

Je vais emprunter aux éléments de la Cinématique la proposition suivante :

Par rapport aux axes rectangulaires fixes a, b, c, soient p, q, r les composantes d'une rotation instantanée autour d'une droite passant à l'origine. Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ les coordonnées d'un point de la figure mobile, et t le temps. On a

$$(25)\qquad \frac{d\mathfrak{a}}{dt} = q\mathfrak{c} - r\mathfrak{b}, \qquad \frac{d\mathfrak{b}}{dt} = r\mathfrak{a} - p\mathfrak{c}, \qquad \frac{d\mathfrak{c}}{dt} = p\mathfrak{b} - q\mathfrak{a}.$$

Les sens de rotation sont supposés, dans ces équations, positifs quand, autour de l'axe c, la rotation positive de 90° fait appliquer le côté positif de a sur le côté positif de b, etc. ; ce sont les conventions usuelles.

Dans un mouvement à la Poinsot, soient a', b', c' les coordonnées du point où le plan roulant touche la surface; soient a^2, b^2, c^2 les carrés des axes (positifs ou négatifs). La normale z au plan roulant fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont

$$\cos az = \frac{ha'}{a^2}, \qquad \cos bz = \frac{hb'}{b^2}, \qquad \cos cz = \frac{hc'}{c^2},$$

astreints à la condition, qui exprime le contact,

$$(26)\qquad a^2\cos^2 az + b^2\cos^2 bz + c^2\cos^2 cz = h^2.$$

La rotation instantanée a, par définition, ses composantes p, q, r proportionnelles à a', b', c'; soit $\frac{1}{n}$ le coefficient de proportion. Envisageons le point dont les coordonnées sont les trois cosinus; on aura, d'après les formules (25) de rotation,

$$(27)\qquad \frac{d\cos az}{dt} = q\cos cz - r\cos bz = \frac{1}{nh}(b^2 - c^2)\cos bz\cos cz,$$

avec les deux analogues obtenues par permutation circulaire de a, b, c.

Que l'on suppose les différences $P - Q$, $Q - R$, $R - P$ proportionnelles aux différences $a^2 - b^2$, $b^2 - c^2$, $c^2 - a^2$, et du proportionnel à dt; alors, les équations telles que ces dernières (27) coïncident avec les équations (23). En outre, la comparaison de la relation (24) avec celle-ci, déduite de (26),

$$(28)\quad (a^2 - h^2)\cos^2 az + (b^2 - h^2)\cos^2 bz + (c^2 - h^2)\cos^2 cz = 0.$$

conduit à poser, en désignant par μ un coefficient arbitraire d'homogénéité,

$$(29)\qquad \frac{du}{dt} = \frac{\mu}{n},$$

$$(30)\qquad \begin{cases} a^2 - h^2 = \mu h P = -\dfrac{\varepsilon\mu h}{2i}\,\dfrac{p'v}{pv - e_\alpha}, \\ b^2 - h^2 = \mu h Q = -\dfrac{\varepsilon\mu h}{2i}\,\dfrac{p'v}{pv - e_\beta}, \\ c^2 - h^2 = \mu h R = -\dfrac{\varepsilon\mu h}{2i}\,\dfrac{p'v}{pv - e_\gamma}. \end{cases}$$

Ainsi, en supposant l'argument u variable et proportionnel au temps, l'argument v constant, les formules (1) nous donnent la représentation d'un mouvement à la Poinsot. Il reste à trouver la quantité C, qui est, dans les formules (1), tout à fait arbitraire, et qui, dans le mouvement à la Poinsot, doit être entièrement déterminée. Nous l'obtiendrons en envisageant le mouvement des axes x et y, réglé, comme celui de l'axe z, par des équations telles que

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\cos ax}{dt} = q\cos cx - r\cos bx, \\ \dfrac{d\cos ay}{dt} = q\cos cy - r\cos by. \end{cases}$$

Posons, pour abréger,

$$\mathcal{A} = \cos ax + i\cos ay,$$
$$\mathcal{A}_0 = \cos ax - i\cos ay,$$

et de même $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_0$ désigneront les quantités analogues, b et c remplaçant a. Nous déduisons de (31)

$$\mathfrak{A}_0 \frac{d\mathfrak{A}}{dt} - \mathfrak{A} \frac{d\mathfrak{A}_0}{dt} = q(\mathfrak{A}_0\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{C}_0) - r(\mathfrak{A}_0\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}_0).$$

Mais on a (8)

$$\mathfrak{A}_0\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_0\mathfrak{A} = -2i\varepsilon\cos bz,$$

$$\mathfrak{A}_0\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0\mathfrak{A} = +2i\varepsilon\cos cz,$$

$$q = \frac{b'}{n} = \frac{b^2}{nh}\cos bz, \qquad r = \frac{c'}{n} = \frac{c^2}{nh}\cos cz;$$

il reste donc, d'après (26),

$$\mathfrak{A}_0 \frac{d\mathfrak{A}}{dt} - \mathfrak{A} \frac{d\mathfrak{A}_0}{dt} = -\frac{2i\varepsilon}{nh}(b^2\cos^2 bz + c^2\cos^2 cz)$$
$$= -\frac{2i\varepsilon h}{n}\left(1 - \frac{a^2}{h^2}\cos^2 az\right).$$

Divisant aux deux membres par $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0 = 1 - \cos^2 az$ et introduisant du au lieu de dt, suivant la relation (29), nous aurons

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}\frac{d\mathfrak{A}}{du} - \frac{1}{\mathfrak{A}_0}\frac{d\mathfrak{A}_0}{du} = -\frac{2i\varepsilon h}{\mu}\,\frac{1 - \frac{a^2}{h^2}\cos^2 az}{1 - \cos^2 az}$$
$$= -\frac{2i\varepsilon h}{\mu}\left(1 - \frac{a^2 - h^2}{h^2}\,\frac{\cos^2 az}{1 - \cos^2 az}\right).$$

En remplaçant $a^2 - h^2$ par son expression (30) et $\cos^2 az$ par

$$\cos^2 az = \frac{\wp u - e_\alpha}{\wp(v - \omega_\alpha) - e_\alpha}, \tag{32}$$

on obtient

$$\frac{a^2 - h^2}{h^2}\,\frac{\cos^2 az}{1 - \cos^2 az} = \frac{\varepsilon\mu}{2ih}\,\frac{\wp' v}{\wp v - e_\alpha}\,\frac{\wp u - e_\alpha}{\wp u - \wp(v - \omega_\alpha)}.$$

La décomposition en éléments simples, par rapport à u, donne

$$\frac{\wp u - e_\alpha}{\wp u - \wp(v - \omega_\alpha)} = \frac{\wp(v - \omega_\alpha) - e_\alpha}{\wp'(v - \omega_\alpha)}\,[\zeta(u - v + \omega_\alpha) - \zeta(u + v - \omega_\alpha)$$
$$+ \zeta v + \zeta(v - 2\omega_\alpha)].$$

Mais on a d'abord

$$\zeta(v - 2\omega_\alpha) = \zeta v - 2\eta_\alpha$$

et, par le théorème d'addition des demi-périodes,

$$\frac{\wp(v - \omega_\alpha) - e_\alpha}{\wp'(v - \omega_\alpha)} = -\frac{\wp v - e_\alpha}{\wp' v}.$$

Il reste donc

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2 - h^2}{h^2}\,\frac{\cos^2 az}{1 - \cos^2 az} \\
&\quad = -\frac{\varepsilon\mu}{2ih}\left[\zeta(u - v + \omega_\alpha) - \zeta(u + v - \omega_\alpha) + 2\zeta v - 2\eta_\alpha\right], \\
&\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{du} - \frac{1}{\lambda_0}\frac{d\lambda_0}{du} \\
&\quad = -\frac{2i\varepsilon h}{\mu} + \zeta(u + v - \omega_\alpha) - \zeta(u - v + \omega_\alpha) - 2\zeta v + 2\eta_\alpha.
\end{aligned}$$

Comme λ et λ_0 ne sont autres que $\cos ax \pm i\cos ay$, le premier membre de cette dernière égalité nous est fourni aussi, d'après (1), sous la forme

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{du} - \frac{1}{\lambda_0}\frac{d\lambda_0}{du} = \frac{2}{C}\frac{dC}{du} + \zeta(u + v - \omega_\alpha) - \zeta(u - v + \omega_\alpha) + 2\eta_\alpha.$$

La comparaison des deux égalités nous donne

$$\frac{1}{C}\frac{dC}{du} = -\frac{i\varepsilon h}{\mu} - \zeta v.$$

Par conséquent, C est une exponentielle du premier degré en u, où le seul coefficient de u est bien déterminé,

$$C = ke^{\left(\frac{i\varepsilon h}{\mu} - \zeta v\right)u};$$

k est une constante arbitraire, dont le choix est subordonné à celui des axes rectangulaires x, y, parallèles au plan roulant, et qu'on peut prendre arbitrairement dans une des positions de la figure.

En conclusion, les formules (1) où l'on suppose v constant, u variant

proportionnellement au temps, et C une exponentielle du premier degré en u, $C = ke^{\lambda u}$, représentent un mouvement à la Poinsot. La distance h du plan roulant au centre est donnée par la formule

$$h = -\frac{\mu}{i\varepsilon}(\lambda + \zeta v),$$

et les carrés des axes par les formules (30); μ est une constante arbitraire d'homogénéité, le signe de la quantité $\varepsilon = \pm 1$ indique si les deux systèmes d'axes x, y, z et a, b, c sont congruents ou non congruents.

Pour mieux faire apparaître l'homogénéité, il faut considérer comme donné $\frac{\mu}{n}$, au lieu de μ, et écrire alors

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{h}{n} &= -\frac{1}{i\varepsilon}\frac{\mu}{n}(\lambda + \zeta v), \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\mu}{n}, \qquad C = ke^{\lambda u}, \\ \frac{a^2 - h^2}{n^2} &= -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{n^2}(\lambda + \zeta v)\frac{\wp' v}{\wp v - e_\alpha}, \\ \frac{b^2 - h^2}{n^2} &= -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{n^2}(\lambda + \zeta v)\frac{\wp' v}{\wp v - e_\beta}, \\ \frac{c^2 - h^2}{n^2} &= -\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{n^2}(\lambda + \zeta v)\frac{\wp' v}{\wp v - e_\gamma}. \end{aligned}\right.$$

Il convient maintenant de discuter cette représentation des mouvements à la Poinsot, pour s'assurer de sa généralité.

En premier lieu, comment doit être choisi l'argument constant v? Il est clair que les trois racines e_α sont réelles, en d'autres termes, que les fonctions elliptiques sont à discriminant positif. En outre, l'arbitraire μ est choisie réelle par convention. Il en résulte d'abord (33) que $\lambda + \zeta v$ doit être purement imaginaire et, par conséquent, $\wp' v$ est purement imaginaire et $\wp v$ réel. Ceci peut avoir lieu de deux manières : $\wp v$ peut être compris entre e_2 et e_1 ou inférieur à e_3. Mais ce dernier cas est impossible; car alors les trois quantités $a^2 - h^2$, $b^2 - h^2$, $c^2 - h^2$ auraient un même signe (33) et, d'après (28), les trois cosinus de az, bz, cz ne seraient pas réels. Ainsi $\wp v$ est entre e_2 et e_1, c'est-à-dire que v, *diminué d'un multiple impair de la demi-période réelle, est purement imaginaire.*

Avant d'examiner l'argument variable u, considérons le produit

$V = U_\alpha^2 U_\beta^2 U_\gamma^2$, qui va intervenir. D'après la définition (2) de U_α, cette quantité se reproduit multipliée par ± 1 ou $\pm i$ quand on modifie la demi-période ω_α par l'addition d'une période $2\tilde{\omega}$. Effectivement ce changement a pour effet de la multiplier par

$$-e^{\tilde{\eta}_\alpha \omega_\alpha - \eta_\alpha \tilde{\omega}}.$$

Supposons $2\tilde{\omega} = 2f\omega_\alpha + 2g\omega_\beta$, f et g étant des nombres entiers. Alors le facteur par lequel se multiplie U_α^2 est $(-1)^g$. Si, en même temps, ω_β n'est pas altéré, ω_γ doit être modifié pour que la somme des trois demi-périodes reste nulle, et U_γ^2 se reproduit, de même, multiplié par $(-1)^{f+g}$. Le produit V est donc multiplié par $(-1)^f$. Il est à remarquer que la quantité $\eta_\alpha\omega_\beta - \eta_\beta\omega_\alpha$ se reproduit aussi multipliée par $(-1)^f$. On aurait un résultat analogue si l'on altérait ω_β sans changer ω_α, et encore si l'on altérait à la fois ces deux demi-périodes. Il est donc prouvé que les altérations des demi-périodes ont pour effet de multiplier V et ε par un même facteur ± 1.

On peut aussi changer entre elles les demi-périodes; l'échange de deux d'entre elles change le signe de ε, sans altérer V, mais change aussi le signe du produit des différences $(e_\alpha - e_\beta)(e_\beta - e_\gamma)(e_\gamma - e_\alpha)$. Ce dernier n'est pas altéré quand on altère les demi-périodes elles-mêmes. Il en résulte donc que tous les changements des demi-périodes laissent inaltéré le produit $\varepsilon V(e_\alpha - e_\beta)(e_\beta - e_\gamma)(e_\gamma - e_\alpha)$. On sait que ce produit est égal à $-i$ quand on prend pour ω_α la demi-période réelle et pour ω_β la demi-période purement imaginaire. On a donc dans tous les cas

$$(34) \qquad U_\alpha^2 U_\beta^2 U_\gamma^2 = \frac{\varepsilon i}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\beta - e_\gamma)(e_\gamma - e_\alpha)}.$$

Examinons maintenant l'argument u. Par l'expression (32) de $\cos^2 az$, nous voyons que $\wp u$ est réel. Multipliant entre elles les expressions des trois cosinus de az, bz, cz, et observant l'égalité (34), nous trouvons

$$(35) \quad (e_\alpha - e_\beta)(e_\beta - e_\gamma)(e_\gamma - e_\alpha)\cos az \cos bz \cos cz = -\frac{\varepsilon}{4}\wp' u \frac{\wp' v}{i},$$

et nous en concluons que $\wp' u$ est réel. Par conséquent, $\wp u$ est supé-

rieur à e_1, ou compris entre e_3 et e_2. Mais, dans le premier cas, les trois quantités $pu - e_\alpha$ seraient positives, tandis que $p(v - \omega_1) - e_1$ est une quantité négative. Donc un des cosinus de az, bz, cz serait imaginaire (32). Donc enfin pu est entre e_3 et e_2; l'argument u, *diminué d'un multiple impair de la demi-période purement imaginaire*, est réel.

Cela étant, on vérifiera sans peine que les cosinus sont bien tous réels et, en valeur absolue, inférieurs à l'unité; les formules représentent bien un mouvement à la Poinsot.

En ce qui concerne la généralité des formules, on doit établir inversement qu'on peut déterminer les fonctions elliptiques et les arguments quand on donne les éléments géométriques du mouvement, c'est-à-dire la surface du second degré, la distance h, la constante n.

Tout d'abord, en multipliant deux à deux les relations (33) membre à membre, nous avons trois égalités, telles que celle-ci :

$$\frac{(a^2-h^2)(b^2-h^2)}{n^2h^2} = -\left(\frac{\mu}{n}\right)^2 \frac{p'^2v}{4(pv-e_\alpha)(pv-e_\beta)}.$$

Comme on a

$$p'^2v = 4(pv-e_1)(pv-e_2)(pv-e_3), \tag{36}$$

il s'ensuit

$$\left(\frac{\mu}{n}\right)^2 (e_\gamma - pv) = \frac{(a^2-h^2)(b^2-h^2)}{n^2h^2}; \tag{37}$$

d'où, en tenant compte de ce que la somme $e_\alpha + e_\beta + e_\gamma$ est nulle,

$$\left(\frac{\mu}{n}\right)^2 e_\gamma = \frac{1}{3}\left[\frac{(b^2-h^2)(c^2-h^2)}{n^2h^2} + \frac{(c^2-h^2)(a^2-h^2)}{n^2h^2} - 2\frac{(a^2-h^2)(b^2-h^2)}{n^2h^2}\right], \tag{38}$$

et de même pour e_α, e_β par permutation des lettres. Voici donc déterminées les fonctions elliptiques à employer, l'arbitraire $\frac{\mu}{n}$ étant choisie à volonté.

Multipliant, membre à membre, les trois égalités (33), on conclut encore, à cause de la relation (36),

$$(39)\qquad \frac{(a^2-h^2)(b^2-h^2)(c^2-h^2)}{n^3h^3} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\mu}{n}\right)^3 \frac{\mathrm{p}'v}{i}.$$

Par la relation (37) est déterminé $\mathrm{p}v$, par cette dernière $\frac{\mathrm{p}'v}{i}$; l'argument v est déterminé entièrement, à des multiples près des périodes.

D'après l'égalité (37), on a

$$\left(\frac{\mu}{n}\right)^2 (e_\alpha - e_\beta) = -\frac{(c^2-h^2)(a^2-b^2)}{n^2h^2},$$

et, par conséquent, suivant (39),

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\mu}{n}\right)^6 (e_\alpha - e_\beta)(e_\beta - e_\gamma)(e_\gamma - e_\alpha) \\ &= -\frac{(a^2-h^2)(b^2-h^2)(c^2-h^2)}{n^3h^3}\,\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{n^3h^3} \\ &= -\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{n^3h^3}\,\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\mu}{n}\right)^3 \frac{\mathrm{p}'v}{i}. \end{aligned}\right.$$

Examinons maintenant comment l'argument variable u est déterminé par les éléments géométriques variables du mouvement.

D'après (40), l'égalité (35) donne celle-ci

$$(41)\qquad \frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{n^3h^3}\cos az\cos bz\cos cz = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{n}\right)^3 \mathrm{p}'u;$$

d'autre part, l'expression (32) de $\cos^2 az$ fournit maintenant pour $\mathrm{p}u$ la formule

$$(42)\qquad \left(\frac{\mu}{n}\right)^2 (e_\alpha - \mathrm{p}u) = \frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{n^2h^2}\cos^2 az.$$

Ainsi que l'argument constant v, l'argument variable u est déterminé entièrement, sauf des multiples des périodes.

Il y a cependant encore une observation à faire au sujet de la détermination des arguments u et v. On voit aisément qu'en les déterminant

comme il vient d'être dit, on assure la concordance des trois cosinus de az, bz, cz avec les expressions elliptiques, au signe près seulement. Il convient donc de revenir encore sur ce sujet pour assurer la concordance complète.

D'après la formule (41), il suffit d'assurer cette concordance pour deux de ces cosinus; elle aura lieu, en même temps pour le troisième.

Supposons deux périodes quelconques $2\tilde{\omega}$, $2\tilde{\omega}'$; changeons u et v en $u+2\tilde{\omega}$, $v+2\tilde{\omega}'$. Par ce changement, $\cos az$ et $\cos bz$ se reproduisent respectivement multipliés par

$$e^{2\eta_\alpha(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')-2\omega_\alpha(\tilde{\eta}+\tilde{\eta}')} \quad \text{et} \quad e^{2\eta_\beta(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}')-2\omega_\beta(\tilde{\eta}+\tilde{\eta}')}.$$

Soient, *à des périodes près* (f et g étant des nombres entiers),

$$\tilde{\omega}+\tilde{\omega}' \equiv f\omega_\alpha + g\omega_\beta.$$

Les deux facteurs par lesquels se multiplient $\cos az$ et $\cos bz$ peuvent se représenter par $(-1)^g$ et $(-1)^f$. On peut donc disposer de la parité des entiers f et g de manière à donner des signes *ad libitum* aux expressions des deux cosinus. Donc, en résumé, *l'accord complet des formules avec un mouvement à la Poinsot entièrement défini exige que la somme des arguments u et v soit déterminée à une double période près.*

Ce dernier fait s'explique fort naturellement par une circonstance du mouvement. Pour l'axe z, ce mouvement est périodique; sa période, relativement à l'argument u, n'est pas la période réelle 2ω, mais le double 4ω. La période de temps est $4\omega\frac{n}{\mu}$.

Pour la parfaite intelligence de l'application que j'ai en vue, il importe de bien préciser, en résumant, la détermination des éléments elliptiques au moyen des données géométriques ou des données numériques qui en tiennent lieu.

Je suppose donnés :

1° Deux systèmes d'axes rectangulaires (de même origine) a, b, c et x, y, z;

2° Trois nombres $\left(\frac{a}{n}\right)^2$, $\left(\frac{b}{n}\right)^2$, $\left(\frac{c}{n}\right)^2$, positifs ou négatifs.

Je considère un ellipsoïde ou hyperboloïde dont les axes de symétrie coïncident avec les axes de coordonnées a, b, c, et aient leurs carrés proportionnels aux trois nombres donnés. Soient a^2, b^2, c^2 ces trois carrés obtenus en multipliant les trois nombres par un nombre positif arbitraire n^2.

J'envisage les plans tangents perpendiculaires à l'axe z; soit h la distance du centre à l'un ou l'autre de ces plans. Je considère encore le nombre $\frac{h}{n}$ obtenu en divisant cette distance par la racine carrée de n^2, *avec un signe arbitraire*, et je prends ce nombre $\frac{h}{n}$, positif ou négatif, pour une donnée complémentaire.

Ceci posé, un mouvement à la Poinsot est entièrement déterminé avec une position de la figure mobile, comme il suit :

1° Les trois formules

$$\cos az = \frac{ha'}{a^2}, \qquad \cos bz = \frac{hb'}{b^2}, \qquad \cos cz = \frac{hc'}{c^2}$$

déterminent a', b', c' en fonction des données et des éléments choisis pour construire la figure. Ce sont les coordonnées du point de contact du plan roulant dans une de ses positions. On a donc une position de la figure mobile.

2° Ces mêmes formules, étant écrites ainsi

$$\cos az = \left(\frac{n}{a}\right)^2 \frac{h}{a}\frac{a'}{n}, \qquad \ldots,$$

déterminent, en fonction des données, les composantes $\frac{a'}{n}$, $\frac{b'}{n}$, $\frac{c'}{n}$ de la rotation instantanée pour la position ci-dessus de la figure mobile.

Le mouvement est donc bien déterminé, sans aucune ambiguïté.

Pour représenter ce mouvement au moyen des formules elliptiques, on emploiera des fonctions elliptiques à discriminant positif. La détermination de ces fonctions elliptiques comporte, en premier lieu, l'introduction d'une constante arbitraire d'homogénéité, réelle et dénotée par $\frac{\mu}{n}$. Les trois racines e_1, e_2, e_3 sont alors données par les trois formules telles que la formule (38). Comme on doit avoir $e_1 > e_2 > e_3$,

les indices α, β, γ reproduisent 1, 2, 3 dans un ordre qui n'a rien d'arbitraire. Les demi-périodes ω_α, ω_β, ω_γ sont alors déterminées à des périodes près. On peut achever de les déterminer *ad libitum*, mais ce choix doit cependant être fait de telle sorte que la quantité ε ait le signe qui lui est assigné par les données : elle doit être positive ou négative, suivant que les deux systèmes d'axes sont congruents ou non.

L'argument elliptique constant v est déterminé à des périodes près par les formules (37) et (39), en sorte que les quantités $\left(\frac{\mu}{n}\right)^2 pv$, $\left(\frac{\mu}{n}\right)^3 p'v$ peuvent être envisagées comme des données.

L'argument elliptique variable diminué d'un multiple impair de la période purement imaginaire est dans le rapport $\frac{\mu}{n}$ avec le temps. Mais, avec les données que j'ai prises, il faut le préciser davantage et dire la valeur de cet argument pour la position donnée de la figure mobile. A cet effet, on doit prendre les formules (42) et (41) qui déterminent pu et $p'u$, et par lesquelles on voit que $\left(\frac{\mu}{n}\right)^2 pu$ et $\left(\frac{\mu}{n}\right)^3 p'u$ peuvent être envisagés comme des données. Par là, l'argument u, qui correspond à la position donnée de la figure mobile, est déterminé à des périodes près. Toutefois, si l'on prend arbitrairement l'une quelconque des déterminations de u et de v, les formules reproduiront les cosinus de az, bz, cz en valeur absolue seulement. Pour qu'elles reproduisent ces cosinus eux-mêmes, il faudra ajouter à $u + v$ une période déterminée, sauf des multiples de doubles périodes.

Telle est, en résumé, la manière de représenter par les formules elliptiques un mouvement à la Poinsot géométriquement donné.

V. — Sur la concordance de deux mouvements a la Poinsot.

Considérons deux mouvements à la Poinsot, qui donnent lieu aux mêmes fonctions elliptiques, c'est-à-dire à des fonctions ayant un même invariant absolu.

Nous distinguerons ces deux mouvements par les indices 0 et 1 : l'indice 0 affectera les lettres relatives à l'un, l'indice 1 les lettres correspondantes et relatives à l'autre mouvement.

Comme les deux constantes d'homogénéité μ_0, μ_1 sont *ad libitum*, on peut supposer que les quantités e_1, e_2, e_3 sont les mêmes dans les formules relatives à l'un ou l'autre des mouvements. Grâce aux arbitraires μ_0, μ_1, on peut donc exprimer la condition de coïncidence des invariants en disant que les trois différences, telles que

$$\frac{(a_0^2-h_0^2)(b_0^2-h_0^2)}{\mu_0^2 h_0^2} - \frac{(a_1^2-h_1^2)(b_1^2-h_1^2)}{\mu_1^2 h_1^2},$$

sont égales entre elles.

Supposons maintenant les deux mouvements *isochrones*, c'est-à-dire ayant une même période de temps. Il faudra alors que les deux rapports $\frac{\mu_0}{n_0}$, $\frac{\mu_1}{n_1}$ soient égaux entre eux, en valeur absolue. On pourra dès lors remplacer μ_0^2, μ_1^2 par n_0^2, n_1^2 dans les différences précédentes.

Deux mouvements à la Poinsot, au même invariant et isochrones seront dits concordants. La condition de concordance s'exprime, on le voit, par la double égalité des trois différences, telles que

$$(13)\qquad \frac{(a_0^2-h_0^2)(b_0^2-h_0^2)}{n_0^2 h_0^2} - \frac{(a_1^2-h_1^2)(b_1^2-h_1^2)}{n_1^2 h_1^2}.$$

Considérant ainsi deux mouvements concordants, il nous faut trouver les relations qui existent entre les positions des deux figures mobiles, prises en un même instant quelconque. Dans la solution de cette question, il entre une constante arbitraire nouvelle; on peut supposer, en effet, que l'une des figures occupe une quelconque de ses positions en un instant initial, où l'autre figure occupe une position déterminée. Cette supposition faite, la correspondance entre les positions des deux figures sera complètement établie.

Les deux figures mobiles sont les deux systèmes d'axes x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1. Je ferai intervenir dans la notation un seul système d'axes fixes a, b, c, comme si les deux surfaces du second degré avaient les mêmes plans de symétrie. C'est, au reste, la supposition même que j'aurai à faire plus loin.

Les différentielles des arguments variables du_0, du_1 étant égales à $\frac{\mu_0}{n_0}dt$, $\frac{\mu_1}{n_1}dt$, sont égales entre elles, en valeur absolue; $u_0 \pm u_1$ est une

constante. Il est indifférent de supposer constante la somme ou la différence, attendu que les formules (1) restent inaltérées par le changement des u, v, C en $-u$, $-v$, $-$ C. Je supposerai la somme constante, et poserai

$$(44)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mu_1}{n_1} = -\dfrac{\mu_0}{n_0} = \tau, \\ u_0 + u_1 = v. \end{cases}$$

La relation entre les éléments *elliptiques* variables des deux mouvements est ainsi trouvée. C'est à l'addition des arguments qu'il faut maintenant demander les relations entre les éléments *géométriques*.

Pour ce but, on devra considérer les quantités suivantes :

$$(45)\qquad \begin{cases} \tau^2 \wp u_0 = -\dfrac{1}{3 n_0^2 h_0^2} \sum (a_0^2 - b_0^2)(a_0^2 - c_0^2) \cos^2 a z_0, \\ \tau^2 \wp u_1 = -\dfrac{1}{3 n_1^2 h_1^2} \sum (a_1^2 - b_1^2)(a_1^2 - c_1^2) \cos^2 a z_1, \\ -\tau^3 \wp' u_0 = \dfrac{2}{n_0^3 h_0^3} (a_0^2 - b_0^2)(b_0^2 - c_0^2)(c_0^2 - a_0^2) \cos a z_0 \cos b z_0 \cos c z_0, \\ \tau^3 \wp' u_1 = \dfrac{2}{n_1^3 h_1^3} (a_1^2 - b_1^2)(b_1^2 - c_1^2)(c_1^2 - a_1^2) \cos a z_1 \cos b z_0 \cos c z_1. \end{cases}$$

Ces quantités ont effectivement la signification elliptique que la notation leur attribue, comme on voit par les formules (41, 42 et 44).

Pour deux mouvements concordants, il existe deux constantes $\tau^2 \wp v$, $\tau^3 \wp' v$, donnant lieu aux deux relations

$$(46)\qquad \frac{\tau^3 \wp' u_0 + \tau^3 \wp' v}{\tau^2 \wp u_0 - \tau^2 \wp v} = \frac{\tau^3 \wp' u_1 + \tau^3 \wp' v}{\tau^2 \wp u_1 - \tau^2 \wp v},$$

$$(47)\qquad \tau^2 \wp u_0 + \tau^2 \wp u_1 + \tau^2 \wp v = \left(\frac{1}{2} \frac{\tau^3 \wp' u_0 + \tau^3 \wp' v}{\tau^2 \wp u_0 - \tau^2 \wp v} \right)^2.$$

Ces deux relations ne sont pas indépendantes; les deux constantes $\tau^2 \wp v$, $\tau^3 \wp' v$ ne sont pas toutes deux arbitraires. Cette circonstance, on va le voir, constitue un avantage, et nous allons, pour préciser entièrement, envisager encore d'autres relations.

Considérons l'angle que font entre eux les deux axes mobiles z_0, z_1.

Son cosinus est donné par la formule (21). En y mettant v au lieu de $u_0 + u_1$, j'obtiens

$$(48)\qquad \cos z_0 z_1 = \frac{2\zeta u_0 + 2\zeta u_1 - \sum \zeta \frac{v \pm v_1 \pm v_0}{2}}{\sum \zeta \frac{v \pm (v_0 - v_1)}{2} - \sum \zeta \frac{v \pm (v_0 + v_1)}{2}}.$$

Par le théorème d'addition des fonctions ζ, on a

$$(49)\qquad \zeta u_0 + \zeta u_1 - \zeta v = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}' u_0 - \mathrm{p}' u_1}{\mathrm{p} u_0 - \mathrm{p} u_1}.$$

Le second membre peut être exprimé par le moyen des quantités (45), comme il suit. Posons (42)

$$(50)\qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{(a_0^2 - b_0^2)(a_0^2 - c_0^2)}{n_0^2 h_0^2}\cos^2 a z_0 - \frac{(a_1^2 - b_1^2)(a_1^2 - c_1^2)}{n_1^2 h_1^2}\cos^2 a z_1 \\ &= \tau^2(\mathrm{p} u_1 - \mathrm{p} u_0), \end{aligned} \right.$$

en observant que cette quantité variable A ne change pas par le changement des lettres a, b, c; puis,

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{A}\left[\frac{(a_0^2 - b_0^2)(b_0^2 - c_0^2)(c_0^2 - a_0^2)}{n_0^3 h_0^3}\cos a z_0 \cos b z_0 \cos c z_0 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{(a_1^2 - b_1^2)(b_1^2 - c_1^2)(c_1^2 - a_1^2)}{n_1^3 h_1^3}\cos a z_1 \cos b z_1 \cos c z_1\right] \\ &= \frac{1}{2}\tau\frac{\mathrm{p}' u_0 - \mathrm{p}' u_1}{\mathrm{p} u_0 - \mathrm{p} u_1}. \end{aligned}$$

Désignons encore par A et B les deux constantes

$$(51)\qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \tau\left[\sum \zeta \frac{v \pm (v_0 - v_1)}{2} - \sum \zeta \frac{v \pm (v_0 + v_1)}{2}\right], \\ B &= \tau\left[\sum \zeta \frac{v \pm v_0 \pm v_1}{2} - 2\zeta v\right]. \end{aligned} \right.$$

L'égalité (49) nous fournit la relation

$$(52)\qquad A(\cos a z_0 \cos a z_1 + \cos b z_0 \cos b z_1 + \cos c z_0 \cos c z_1) + 2N + B = 0.$$

En différentiant, nous allons avoir une nouvelle relation contenant

la seule constante A. Pour faire cette différentiation, on a d'abord (44)

$$\frac{d}{dt}(\zeta u_1 + \zeta u_0) = \tau\left(\frac{d\zeta u_1}{du_1} - \frac{d\zeta u_0}{du_0}\right) = \tau(\mathrm{p}u_0 - \mathrm{p}u_1) = -\frac{A}{\tau};$$

d'où résulte, d'après (49),

$$\frac{dN}{dt} = A.$$

D'autre part, suivant (27),

$$\frac{d\cos az_0}{dt} = \frac{(b_0^2 - c_0^2)}{n_0^2 h_0^2}\cos bz_0 \cos cz_0, \qquad \ldots.$$

La relation (52) donne donc, par différentiation,

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} &A\sum\left(\frac{b_0^2 - c_0^2}{n_0^2 h_0^2}\cos bz_0 \cos cz_0 \cos az_1\right.\\ &\qquad\left. + \frac{b_1^2 - c_1^2}{n_1^2 h_1^2}\cos bz_1 \cos cz_1 \cos az_0\right) + 2A = 0.\end{aligned}\right.$$

Après avoir établi ces formules, envisageons la question importante de déterminer les positions correspondantes des deux figures mobiles dans deux mouvements concordants.

Ce qui justifie l'emploi des relations surabondantes (46, 47, 52, 53), c'est la nécessité de fixer les signes des cosinus.

Si l'on suppose connues les constantes $\tau^2 \mathrm{p}c$, $\tau^3 \mathrm{p}'c$, A, B, on peut déterminer entièrement les cosinus de az_1, bz_1, cz_1, correspondant à des cosinus donnés pour az_0, bz_0, cz_0. Effectivement, la relation (47) donne $\tau^2 \mathrm{p}u_1$, par conséquent A (50) et les carrés des cosinus. La relation (46) donne $\tau^3 \mathrm{p}'u_1$, et, par conséquent, N; puis l'une ou l'autre des relations (52) et (53) permet de fixer les signes des cosinus eux-mêmes.

Il n'y a d'ailleurs aucun embarras pour choisir ces constantes $\tau^2 \mathrm{p}c$, $\tau^3 \mathrm{p}'c$, A, B, si l'on veut composer un exemple. Ayant pris, en effet, deux mouvements à la Poinsot dont les données satisfassent aux relations de concordance (43), on peut choisir à volonté, dans ces deux mouvements, les axes z_0, z_1 pour correspondants. La valeur de A, pour cette position, se trouve déterminée; par la relation (53), on en

conclut A; par la relation (52), B, et par les relations (47) et (46), $\tau^2 \wp v$, $\tau^3 \wp' v$.

On le voit donc, si l'on définit deux mouvements à la Poinsot concordants par la position des deux figures mobiles en un même instant, les constantes A, B, $\tau^2 \wp' v$ peuvent être envisagées comme des données; de plus, pour chaque position ultérieure d'un des axes, z_0 par exemple, celle de l'autre axe z_1 est déterminée complètement par des formules explicites.

VI. — Sur une forme de l'inversion des intégrales elliptiques.

Dans l'expression (48) de $\cos z_0 z_1$, les arguments u_0 et u_1 sont seuls variables, et leur somme est constante. Si l'on prend l'un de ces arguments pour variable indépendante, $\cos z_0 z_1$ est une fonction doublement périodique à deux pôles. On sait, par la théorie générale, que le carré de sa dérivée est exprimable par un polynôme du quatrième degré, où la variable est ce cosinus lui-même. Je vais former ce polynôme, non pas sous sa forme la plus réduite, mais sous la forme la plus commode pour l'application que j'ai en vue. Au lieu de raisonner sur l'expression même de $\cos z_0 z_1$, je vais employer une expression d'apparence plus simple, en modifiant seulement les notations. Je dois avertir, en outre, que, dans ce qui va suivre, aucune supposition particulière ne doit être faite sur les fonctions elliptiques employées, tandis que précédemment elles étaient supposées à discriminant réel et positif.

La fonction doublement périodique à deux pôles qui sert de *type* est la suivante :

$$(54) \qquad z = \zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v},$$

et l'on y considère u comme l'argument variable. Pour abréger l'écriture, je conviens de représenter, au moyen d'un indice, le résultat de la substitution d'un argument constant quelconque à la place de u dans cette fonction. Ainsi, je poserai

$$z_a = \zeta(a+v) - \zeta a - \zeta v.$$

Pour représenter alors une fonction doublement périodique à deux pôles et quelconque, je prendrai $(z - z_a)$ multiplié par un facteur constant arbitraire. Cette notation a l'avantage de mettre en évidence les racines de la fonction, à savoir $u = a$ et $u = -(a + v)$, sauf des périodes, et l'on peut immédiatement écrire l'expression de la fonction en produit; c'est

$$(55) \qquad z - z_a = \frac{\sigma v\, \sigma(u - a)\, \sigma(u + a + v)}{\sigma a\, \sigma(a + v)\, \sigma u\, \sigma(u + v)}.$$

Prenons quatre fonctions analogues en employant quatre arguments constants a, b, a_1, b_1. Partageons les facteurs, qui en proviennent suivant l'expression (55), en deux groupes, chacun de ces groupes comprenant un seul facteur de chaque espèce pris dans une même fonction. Soient ainsi Φ et Φ_1 les fonctions composées de cette manière :

$$\Phi = \frac{\sigma^2 v\, \sigma(u - a)\, \sigma(u - a_1)\, \sigma(u + b + v)\, \sigma(u + b_1 + v)}{\sigma a\, \sigma a_1\, \sigma(b + v)\, \sigma(b_1 + v)\, \sigma^2 u\, \sigma^2(u + v)},$$

$$\Phi_1 = \frac{\sigma^2 v\, \sigma(u - b)\, \sigma(u - b_1)\, \sigma(u + a + v)\, \sigma(u + a_1 + v)}{\sigma b\, \sigma b_1\, \sigma(a + v)\, \sigma(a_1 + v)\, \sigma^2 u\, \sigma^2(u + v)}.$$

Ces deux fonctions sont doublement périodiques de seconde espèce, en général. Mais elles deviennent doublement périodiques ordinaires, toutes deux en même temps, sous l'unique condition

$$(56) \qquad a + a_1 = b + b_1.$$

Supposons que cette relation entre les quatre arguments constants ait lieu effectivement. La fonction Φ est alors doublement périodique; décomposons-la en éléments simples. Il entrera, dans la décomposition, $\wp u$, $\wp(u + v)$ et $\zeta(u + v) - \zeta u$, en sorte qu'on pourra écrire la formule de décomposition sous la forme

$$\Phi = \alpha[\wp u - \wp(u + v)] - \beta[\wp u + \wp(u + v) + \wp v] - \gamma z - \delta,$$

où α, β, γ, δ sont des coefficients constants, z tenant la place de

$$\zeta(u + v) - \zeta u.$$

La fonction Φ_1 se déduit de Φ par le changement de u en $-(u+v)$, en ce qui concerne les facteurs variables. Pour ce qui regarde les facteurs constants, il faut encore multiplier par

$$\frac{\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma(b+v)\,\sigma(b_1+v)}{\sigma b\,\sigma b_1\,\sigma(a+v)\,\sigma(a_1+v)}.$$

Dans le changement de u en $-(u+v)$, $\wp u - \wp(u+v)$ se reproduit changé de signe, tandis que $\wp u + \wp(u+v) + \wp v$ et z se reproduisent sans changement. On a donc

$$\begin{aligned}&-\frac{\sigma b\,\sigma b_1\,\sigma(a+v)\,\sigma(a_1+v)}{\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma(b+v)\,\sigma(b_1+v)}\Phi_1\\ &\quad=\alpha[\wp u-\wp(u+v)]+\beta[\wp u+\wp(u+v)+\wp v]+\gamma z+\delta.\end{aligned}$$

Soit, pour abréger l'écriture,

$$(57)\qquad -\frac{\sigma b\,\sigma b_1\,\sigma(a+v)\,\sigma(a_1+v)}{\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma(b+v)\,\sigma(b_1+v)}=\lambda,$$

et rappelons qu'on a, par le théorème d'addition,

$$\wp u+\wp(u+v)+\wp v=z^2;$$

nous pouvons écrire nos deux formules ainsi :

$$(58)\qquad \Phi=\alpha[\wp u-\wp(u+v)]-(\beta z^2+\gamma z+\delta),$$

$$(59)\qquad \lambda\Phi_1=\alpha[\wp u-\wp(u+v)]+(\beta z^2+\gamma z+\delta).$$

J'en conclus

$$\Phi\Phi_1+\frac{1}{\lambda}(\beta z^2+\gamma z+\delta)^2=\frac{\alpha^2}{\lambda}[\wp u-\wp(u+v)]^2.$$

En remettant, au lieu de $\Phi\Phi_1$, le produit des quatre binômes analogues à $(z-z_a)$, j'ai ainsi

$$(60)\qquad \left\{\begin{aligned}&(z-z_a)(z-z_b)(z-z_{a_1})(z-z_{b_1})+\frac{1}{\lambda}(\beta z^2+\gamma z+\delta)^2\\ &\quad=\frac{\alpha^2}{\lambda}[\wp u-\wp(u+v)]^2.\end{aligned}\right.$$

C'est la formule d'inversion mise sous une forme spéciale, d'une grande généralité : z est une fonction doublement périodique de u et nous avons ici un polynôme du quatrième degré en z exprimé par le carré d'une fonction doublement périodique de u; de plus, cette fonction est la dérivée de z par rapport à u; on a, en effet,

$$\frac{dz}{du} = \wp u - \wp(u + v).$$

Pour compléter ce résultat, il faut encore donner les expressions des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en fonction des arguments a, b, a_1, b_1, v. A cet effet, pour avoir α et β, envisageons la partie principale de Φ aux pôles $u = 0$ et $u = -v$. Nous aurons ainsi

$$(61) \qquad \begin{cases} 1 = \alpha - \beta, \\ -\lambda = -\alpha - \beta. \end{cases}$$

L'expression qui en résulte pour le coefficient $\frac{\alpha^2}{\lambda}$ a une forme intéressante. Pour la présenter sous un aspect symétrique, posons, conformément à la relation (56),

$$(62) \qquad \begin{cases} a_1 = c + a', & a = c - a', \\ b_1 = c + b', & b = c - b'. \end{cases}$$

D'après l'*équation à trois termes*, on a

$$\begin{aligned} &\sigma a\, \sigma a_1\, \sigma(b + v)\, \sigma(b_1 + v) - \sigma b\, \sigma b_1\, \sigma(a + v)\, \sigma(a_1 + v) \\ &\quad = \sigma v\, \sigma(2c + v)\, \sigma(b' - a')\, \sigma(b' + a'), \end{aligned}$$

et il en résulte

$$\frac{\alpha^2}{\lambda} = \frac{[\sigma v\, \sigma(2c + v)\, \sigma(b' - a')\, \sigma(b' + a')]^2}{4\sigma a\, \sigma a_1\, \sigma b\, \sigma b_1\, \sigma(a + v)\, \sigma(a_1 + v)\, \sigma(b + v)\, \sigma(b_1 + v)}.$$

Il y a aussi une expression remarquable pour $\frac{2\beta\gamma}{\lambda}$, mais ce n'est pas par cette voie qu'on la trouve le plus facilement. On l'obtient immé-

diatement en observant que le polynôme (60) diffère seulement par le facteur constant $\frac{\alpha^2}{\lambda}$ du polynôme (¹)

$$(63)\qquad z^4 - 6\wp v . z^2 + 4\wp' v . z + g_2 - 3\wp^2 v,$$

expression de $\left(\frac{dz}{du}\right)^2$. Le polynôme (60) manque donc du second terme et l'on a

$$\frac{2\beta\gamma}{\lambda} = z_a + z_b + z_{a_1} + z_{b_1}.$$

Cette forme de l'inversion se présente dans plusieurs applications mécaniques, mais pour des cas particuliers de la formule (60). Dans l'application que j'ai ici en vue, le coefficient β est nul. On voit par les égalités (61) qu'en ce cas λ et α se réduisent à l'unité, et la formule (60) devient simplement

$$(64)\qquad \left\{\begin{aligned} &(z - z_a)(z - z_b)(z - z_{a_1})(z - z_{b_1}) + (\gamma z + \delta)^2 \\ &\quad = [\wp u - \wp(u + v)]^2. \end{aligned}\right.$$

La manière dont il faut choisir les arguments a, b, a_1, b_1 pour obtenir cette formule, n'apparaît pas très nettement par la relation

$$(65)\qquad z_a + z_b + z_{a_1} + z_{b_1} = 0,$$

non plus que par la relation $\lambda = 1$ avec la forme (57) de λ. Mais, en employant les notations (62) et posant, en outre,

$$(66)\qquad v = w - c,$$

on peut écrire λ ainsi

$$-\lambda = \frac{\sigma(w - a')\,\sigma(w + a')\,\sigma(c - b')\,\sigma(c + b')}{\sigma(w - b')\,\sigma(w + b')\,\sigma(c - a')\,\sigma(c + a')} = \frac{(\wp w - \wp a')(\wp c - \wp b')}{(\wp w - \wp b')(\wp c - \wp a')}.$$

(¹) *Traité des fonctions elliptiques*, p. 119.

La condition $\lambda = 1$ donne alors

$$(67)\quad (\wp w - \wp a')(\wp c - \wp b') + (\wp w - \wp b')(\wp c - \wp a') = 0$$

et permet de trouver sans ambiguïté la fonction $\wp$ pour l'un quelconque des quatre arguments a', b', c, w, étant donnés les trois autres.

VII. — Mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini en l'absence de force accélératrice.

Équations différentielles.

D'après MM. W. Thomson et Tait, M. Kirchhoff a établi, sous une forme bien connue et fort remarquable, les équations différentielles du mouvement pour un corps solide plongé dans un liquide indéfini, en l'absence de toute force accélératrice extérieure. Clebsch [1] a modifié la forme de ces équations par l'emploi de variables un peu différentes, et c'est la forme de Clebsch que j'emploierai ici. Il y a, dans ces équations, six inconnues $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$. La variable indépendante est le temps, désigné par t. La lettre T désigne la force vive du système total (solide et liquide). C'est une forme quadratique contenant les six variables x, y.

Voici les équations différentielles dont il s'agit

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_3\frac{\partial T}{\partial y_2} - x_2\frac{\partial T}{\partial y_3},\\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1\frac{\partial T}{\partial y_3} - x_3\frac{\partial T}{\partial y_1},\\ \frac{dx_3}{dt} &= x_2\frac{\partial T}{\partial y_1} - x_1\frac{\partial T}{\partial y_2};\end{aligned}\right.$$

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= x_3\frac{\partial T}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial T}{\partial x_3} + y_3\frac{\partial T}{\partial y_2} - y_2\frac{\partial T}{\partial y_3},\\ \frac{dy_2}{dt} &= x_1\frac{\partial T}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial T}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3\frac{\partial T}{\partial y_1},\\ \frac{dy_3}{dt} &= x_2\frac{\partial T}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial T}{\partial x_2} + y_2\frac{\partial T}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial T}{\partial y_2},\end{aligned}\right.$$

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. III, p. 238.

Voici maintenant la signification des six variables. On considère trois axes rectangulaires, mobiles dans l'espace, fixes dans le corps. Les composantes de la vitesse de l'origine de ces axes, prises sur ces axes eux-mêmes, étant désignées par U, V, W, et les composantes de la rotation instantanée relative de l'espace par rapport au corps étant désignées par P, Q, R [1], on a

$$x_1 = \frac{\partial T}{\partial U}, \quad x_2 = \frac{\partial T}{\partial V}, \quad x_3 = \frac{\partial T}{\partial W},$$
$$y_1 = \frac{\partial T}{\partial P}, \quad y_2 = \frac{\partial T}{\partial Q}, \quad y_3 = \frac{\partial T}{\partial R},$$

quand T est exprimé par les variables U, V, W, P, Q, R. Inversement, T étant exprimé par les x, y, on a

$$(70) \qquad U = \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad V = \frac{\partial T}{\partial x_2}, \quad W = \frac{\partial T}{\partial x_3},$$

$$(71) \qquad P = \frac{\partial T}{\partial y_1}, \quad Q = \frac{\partial T}{\partial y_2}, \quad R = \frac{\partial T}{\partial y_3}.$$

Quelle que soit la forme quadratique T, les équations différentielles (68) et (69) ont trois intégrales immédiates, savoir

$$(72) \qquad 2T = \text{const.} = l,$$

$$(73) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{const.} = m,$$

$$(74) \qquad x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \text{const.} = n.$$

Cas intégrable. Réduction à une intégrale elliptique.

M. Kirchhoff avait réduit à une intégrale elliptique la solution du problème dans le cas particulier où la force vive ne contient que les

---

[1] Je dis la composante de *la rotation instantanée de l'espace par rapport au corps* et non *la rotation du corps dans l'espace,* afin de rétablir le sens habituel de rotation, qui est renversé dans les équations de Clebsch. L'observation de ce détail, sans importance théorique, est cependant indispensable si l'on veut éviter une confusion dans les résultats.

carrés des variables. Clebsch, dans des recherches fort étendues sur les équations (68) et (69), a montré que la même circonstance se produit dans un cas un peu plus général, celui où T a la forme suivante :

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned} T = {} & \tfrac{1}{2}p(x_1^2 + x_2^2) + \tfrac{1}{2}p' x_3^2 \\ & + q(x_1 y_1 + x_2 y_2) + q' x_3 y_3 + \tfrac{1}{2}r(y_1^2 + y_2^2) + \tfrac{1}{2}r' y_3^2. \end{aligned}\right.$$

Effectivement, en ce cas, le second membre de la dernière équation (69) se réduit à zéro. Donc y_3 est une constante. Cette nouvelle intégrale assure la solution complète, comme on le sait par le principe du dernier multiplicateur. Sans donner le calcul, Clebsch dit qu'on parvient à une intégrale elliptique; c'est ce qu'en effet nous allons montrer.

Par l'intégrale (74) et la troisième équation (68), nous avons

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned} & x_1 y_1 + x_2 y_2 = n - x_3 y_3, \\ & x_2 y_1 - y_2 x_1 = \frac{1}{r}\frac{dx_3}{dt}, \end{aligned}\right.$$

et l'identité

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + (x_2 y_1 - y_2 x_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$$

nous permet de conclure

$$(77)\qquad \frac{1}{r^2}\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 + (n - x_3 y_3)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2).$$

L'intégrale (73) donne

$$(78)\qquad x_1^2 + x_2^2 = m - x_3^2,$$

et l'intégrale (72) devient

$$(79)\qquad y_1^2 + y_2^2 = \frac{p' - p}{r}(m_1 - h x_3 - x_3^2),$$

avec ces notations abrégées

$$(80)\qquad \begin{cases} m_1 = \dfrac{pm + 2qn + r'y_3^2 - l}{p - p'}, \\ h = 2\dfrac{q - q'}{p - p'}\, y_3. \end{cases}$$

Au moyen des expressions (78) et (79) l'équation (77) devient

$$(81)\quad \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = r(p' - p)(m_1 - hx_3 - x_3^2)(m - x_3^2) - r^2(n - y_3x_3)^2.$$

Comme y_3 est une constante, nous avons ici une équation différentielle où les variables sont séparées; le temps est exprimé au moyen d'une quadrature elliptique.

Il s'agit maintenant d'exprimer les variables x, y en fonction explicite du temps et de parvenir, par leur intermédiaire, à l'expression des quantités qui déterminent, à chaque instant, la position du corps solide.

Inversion; expression elliptique des constantes.

Pour ce but, employons la formule d'inversion (64) en assimilant le carré $-r^2(n - y_3x_3)^2$ au carré $(\gamma z + \delta)^2$. Pour identifier entre elles les premières parties des deux polynômes du quatrième degré, il faudra poser

$$(82)\qquad x_3 = -\tfrac{1}{4}h + \rho z,$$

ρ étant une constante d'homogénéité arbitraire.

Sans préciser en aucune façon les signes des radicaux, nous poserons ensuite

$$(83)\qquad \begin{cases} x_3 - \sqrt{m} = \rho(z - z_a) = -\tfrac{1}{4}h + \rho z - \sqrt{m}, \\ x_3 + \sqrt{m} = \rho(z - z_b) = -\tfrac{1}{4}h + \rho z + \sqrt{m}, \end{cases}$$

$$x_3 + \tfrac{1}{2}h - \sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + m_1} = \rho(z - z_{a_1}) = \tfrac{1}{4}h + \rho z - \sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + m_1},$$

$$x_3 + \tfrac{1}{2}h + \sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + m_1} = \rho(z - z_{b_1}) = \tfrac{1}{4}h + \rho z + \sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + m_1},$$

De là résultent d'abord ces expressions des constantes

$$(84)\quad \begin{cases} 2\sqrt{m} = \rho(z_a - z_b), \\ 2\sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + m_1} = \rho(z_{a_1} - z_{b_1}), \\ \tfrac{1}{2}h = \rho(z_a + z_b) = -\rho(z_{a_1} + z_{b_1}); \end{cases}$$

les deux dernières sont concordantes suivant une égalité ci-dessus (65).

Pour abréger l'écriture, posons

$$(85)\qquad s = \frac{ir y_3}{\sqrt{r(p'-p)}}$$

et identifions les deux carrés dans l'un et l'autre polynôme du second degré en posant

$$(86)\qquad s\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right) = \rho^2(\gamma z + \delta).$$

Nous aurons ainsi, d'après les égalités (81) et (64)

$$\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 = \rho^4 r(p'-p)\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \rho^2 r(p'-p)\left(\frac{dx_3}{du}\right)^2,$$

et, en extrayant les racines carrées,

$$(87)\qquad du = \rho\sqrt{r(p'-p)}\,dt,$$

relation entre l'argument u et le temps t. Pour préciser, nous supposerons la racine carrée extraite de la même manière que dans l'expression (85) de s.

Pour exprimer s et $\frac{n}{y_3}$ d'après l'égalité (86), employons maintenant la relation (58) qui devient, β étant nul et $\alpha = 1$,

$$(88)\qquad \Phi = \mathfrak{p}u - \mathfrak{p}(u+v) - \frac{s}{\rho^2}\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right).$$

Semblablement, λ étant l'unité, on a, d'après (59),

$$(89)\qquad \Phi_1 = \mathfrak{p}u - \mathfrak{p}(u+v) + \frac{s}{\rho^2}\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right).$$

Prenant $u = a$ dans la première, hypothèse qui fait évanouir Φ, ou bien $u = b$ dans la seconde pour faire évanouir Φ_1, on a, suivant (83),

$$(88a) \qquad \wp a - \wp(a + v) = \frac{s}{\rho^2}\left(\sqrt{m} - \frac{n}{y_3}\right),$$

$$(89a) \qquad \wp b - \wp(b + v) = \frac{s}{\rho^2}\left(\sqrt{m} + \frac{n}{y_3}\right).$$

De là résultent

$$(90) \qquad \left\{\begin{aligned} s\sqrt{m} &= \tfrac{1}{2}\rho^2[\wp b + \wp a - \wp(a + v) - \wp(b + v)], \\ \frac{sn}{y_3} &= \tfrac{1}{2}\rho^2[\wp b - \wp a + \wp(a + v) - \wp(b + v)]. \end{aligned}\right.$$

On peut aussi obtenir d'autres expressions de s si l'on décompose Φ et Φ_1 en éléments simples et que l'on prenne, dans ces décompositions, les termes en ζu.

On trouve ainsi

$$\begin{aligned} s &= \rho[\zeta(b + v) + \zeta(b_1 + v) - \zeta a - \zeta a_1 - 2\zeta v] \\ &= -\rho[\zeta(a + v) + \zeta(a_1 + v) - \zeta b - \zeta b_1 - 2\zeta v], \end{aligned}$$

expressions dont la concordance se vérifie par la relation (65).

Expression des variables par des fonctions elliptiques.

Pour la suite du calcul, j'aurai à décomposer en éléments simples la fonction

$$\varphi(u) = \frac{x_3\left(x_3 - \dfrac{n}{y_3}\right)}{x_3^2 - m},$$

et je vais faire tout d'abord cette décomposition.

Devenant infinie seulement quand le dénominateur s'évanouit, cette fonction a les seuls pôles $u = a$, $-(a + v)$, b, $-(b + v)$, comme on voit par les expressions (83) de $x_3 \pm \sqrt{m}$. Nous avons à chercher les résidus de ces pôles. Un tel résidu est la valeur prise, au pôle consi-

déré, par l'expression

$$\frac{x_3\left(x_3-\frac{n}{y_3}\right)}{\frac{d(x_3^2-m)}{du}}=\frac{x_3-\frac{n}{y_3}}{2\frac{dx_3}{du}}=\frac{1}{2\rho}\frac{x_3-\frac{n}{y_3}}{pu-p(u+c)}.$$

Les pôles sont, tous quatre, des racines de Φ ou de Φ_1. On voit par les égalités (88) et (89) que les résidus sont $\pm\frac{\rho}{2s}$ suivant qu'il s'agit des racines de Φ ou des racines de Φ_1. Voici donc la formule de décomposition

$$\begin{aligned}\varphi(u)=\frac{\rho}{2s}[&\zeta(u-a)+\zeta(u+b+c)\\&-\zeta(u-b)-\zeta(u+a+c)+\mathrm{D}],\end{aligned}$$

avec une constante D qu'il faut encore trouver. Pour ce but, observons que l'hypothèse $u=0$ rend x_3 infini (82) et donne ainsi $\varphi(0)=1$. Donc

$$(91)\qquad -\zeta a+\zeta(b+c)+\zeta b-\zeta(a+c)+\mathrm{D}=\frac{2s}{\rho}.$$

Nous allons tout à l'heure employer cette décomposition de $\varphi(u)$, sous la forme suivante. Multipliant $\varphi(u)$ par $iry_3\,dt=\frac{s}{\rho}\,du$, nous avons

$$\begin{aligned}&\frac{irx_3(y_3x_3-n)}{x_3^2-m}\,dt\\&=\tfrac{1}{2}[\zeta(u-a)+\zeta(u+b+c)-\zeta(u-b)-\zeta(u+a+c)+\mathrm{D}]\,du.\end{aligned}$$

Prenons maintenant, d'après (83), la demi-différentielle logarithmique de x_3^2-m; ce sera, en tenant compte de l'intégrale (73),

$$\begin{aligned}&\frac{x_1\,dx_1+x_2\,dx_2}{x_1^2+x_2^2}\\&=\tfrac{1}{2}[\zeta(u-a)+\zeta(u+a+c)\\&\qquad+\zeta(u-b)+\zeta(u+b+c)-2\zeta u-2\zeta(u+c)]\,du,\end{aligned}$$

comme il résulte de l'expression (55) établie pour $z - z_a$ et prise aussi pour son analogue $z - z_b$.

En combinant les deux dernières égalités, j'obtiens celle-ci, qui va être employée,

$$(92)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 - irx_3(y_3x_3 - n)\,dt}{x_1^2 + x_2^2} \\ &\quad = [\zeta(u + a + v) + \zeta(u - b) - \zeta(u + v) - \zeta u - \tfrac{1}{2}\mathrm{D}]\,du. \end{aligned}\right.$$

Arrivons maintenant à la première intégration qu'il faut effectuer. Formons d'abord, d'après les équations différentielles (68), la quantité

$$x_1\frac{dx_2}{dt} - x_2\frac{dx_1}{dt} = (x_1^2 + x_2^2)\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y_3} - x_3\left(x_1\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y_2}\right).$$

En mettant, pour T, son expression (75) et utilisant l'intégrale (74), nous obtenons

$$(93)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{x_1^2 + x_2^2} &= \left[(q' - q)x_3 + r'y_3 - \frac{r\,x_3(n - x_3y_3)}{x_1^2 + x_2^2}\right]dt \\ &= \frac{1}{i}\left(\frac{\alpha}{\rho} + \beta z\right)du - \frac{r\,x_3(n - x_3y_3)}{x_1^2 + x_2^2}\,dt. \end{aligned}\right.$$

On a posé ici, pour abréger,

$$(94)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{s}{r}\left[r' - \frac{h(q' - q)}{4y_3}\right], \\ \beta &= \frac{s(q' - q)}{ry_3} = -\frac{h}{2s}. \end{aligned}\right.$$

A peine est-il besoin d'observer que les quantités représentées par ces lettres α et β sont sans aucun lien avec celles qu'on a envisagées dans un paragraphe précédent, et qui ont disparu du calcul.

Les égalités (92) et (93) nous donnent

$$\begin{aligned} d\log(x_1 + ix_2) &= \frac{x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + i(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)}{x_1^2 + x_2^2} \\ &= \left[\frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{2}\mathrm{D} + \beta z + \zeta(u + a + v) + \zeta(u - b) - \zeta(u + v) - \zeta u\right]du. \end{aligned}$$

ou bien, z étant remplacé par son expression (54) en éléments simples,

$$\frac{d}{du}\log(x_1+ix_2)=\frac{\alpha}{\rho}-\frac{1}{2}\mathrm{D}+\beta[\zeta(u+v)-\zeta u-\zeta v]$$
$$+\zeta(u+a+v)+\zeta(u-b)-\zeta(u+v)-\zeta u.$$

Intégrant les deux membres et écrivant sous une forme appropriée la constante d'intégration E, nous obtenons

$$(95)\quad x_1+ix_2=-\rho\mathrm{E}\left[\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u}e^{-u\zeta v}\right]^{\beta}\frac{\sigma v\,\sigma(u+a+v)\,\sigma(u-b)}{\sigma(b+v)\,\sigma a\,\sigma u\,\sigma(u+v)}e^{\left(\frac{\alpha}{\rho}-\frac{1}{2}\mathrm{D}\right)u}.$$

Pour en déduire la quantité conjuguée x_1-ix_2, je divise par x_1+ix_2 la somme des carrés $x_1^2+x_2^2=m-x_3^2=-\rho^2(z-z_a)(z-z_b)$, après avoir exprimé $z-z_a$ et $z-z_b$ en produit (55). Il vient ainsi

$$(96)\quad x_1-ix_2=\frac{\rho}{\mathrm{E}}\left[\frac{\sigma u}{\sigma(u+v)}e^{u\zeta v}\right]^{\beta}\frac{\sigma v\,\sigma(u+b+v)\,\sigma(u-a)}{\sigma(a+v)\,\sigma b\,\sigma u\,\sigma(u+v)}e^{\left(\frac{1}{2}\mathrm{D}-\frac{\alpha}{\rho}\right)u}.$$

Les deux autres inconnues y_1 et y_2 s'obtiennent sans intégration nouvelle par le calcul suivant, où interviennent les relations (76).

$$(x_1\pm ix_2)(y_1\mp iy_2)=x_1y_1+x_2y_2\pm i(x_2y_1-y_2x_1)$$
$$=u-x_3y_3\pm\frac{i}{r}\frac{dx_3}{dt},$$

ce qui conduit à cette formule

$$(x_1\pm ix_2)(y_1\mp iy_2)=\mp\frac{\rho^2y_3}{s}\left[\mathrm{p}u-\mathrm{p}(u+v)\pm\frac{s}{\rho^2}\left(x_3-\frac{u}{y_3}\right)\right]$$

ou enfin, d'après (88) et (89),

$$(x_1+ix_2)(y_1-iy_2)=-\frac{\rho^2y_3}{s}\Phi_1,$$

$$(x_1-ix_2)(y_1+iy_2)=+\frac{\rho^2y_3}{s}\Phi.$$

Les quantités $x_1 \pm ix_2$, Φ, Φ_1 ont déjà été exprimées en produits; par là on connaîtra les expressions de $y_1 \pm iy_2$ sous forme analogue; mais elles ne seront pas utiles.

Nous avons ainsi exprimé en fonction explicite de u, proportionnel au temps, les cinq inconnues x, y. Mais ces inconnues sont auxiliaires. Il s'agit d'en déduire les quantités qui fixent, à chaque instant, le lieu du corps solide dans le fluide où il est plongé.

Rotation du corps solide.

Je désignerai par X, Y, Z les axes fixes dans l'espace, par A, B, C les axes fixes dans le corps.

Les trois dérivées $\frac{\partial T}{\partial y}$ sont les composantes (71) de la rotation instantanée relative de l'espace par rapport au corps. En considérant la rotation relative de l'axe Z, on a donc, d'après la proposition de Cinématique rappelée plus haut (25),

$$\frac{d\cos AZ}{dt} = \frac{\partial T}{\partial y_2}\cos CZ - \frac{\partial T}{\partial y_3}\cos BZ,$$

avec deux équations analogues obtenues par permutation circulaire des lettres A, B, C.

Les coefficients $\frac{\partial T}{\partial y}$ sont maintenant des fonctions connues du temps t, en sorte que l'on a ainsi trois équations différentielles linéaires, sans second membre, dont les trois cosinus forment un système de solutions. La solution générale comporte trois arbitraires, dont une seulement est déterminée dans le problème actuel par la condition que la somme des carrés soit l'unité. Mais on peut, à volonté, fixer les deux autres arbitraires en choisissant la direction de l'axe Z.

En comparant les équations actuelles aux équations (68), on voit qu'il existe un système de solutions où les inconnues sont proportionnelles à x_1, x_2, x_3.

On peut prendre pour les trois cosinus un tel système et écrire ainsi, d'après (73) et (84),

$$\frac{\cos AZ}{x_1} = \frac{\cos BZ}{x_2} = \frac{\cos CZ}{x_3} = \frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{2}{\rho(z_a - z_b)} = \frac{2}{\rho}\,\frac{\sigma a\,\sigma b\,\sigma(a+v)\,\sigma(b+v)}{\sigma v\,\sigma(a-b)\,\sigma(a+b+v)}.$$

Suivant les égalités (83), (84), (95) et (96), j'en conclus donc

$$(97)\qquad \cos CZ = \frac{2z - z_a - z_b}{z_a - z_b},$$

$$(98)\quad \begin{cases} \cos AZ + i\cos BZ = -2E\left[\dfrac{\sigma(u+v)}{\sigma u}e^{-u\zeta v}\right]^{\beta}\dfrac{\sigma b\,\sigma(a+v)\,\sigma(u+a+v)\,\sigma(u-b)}{\sigma(a-b)\,\sigma(a+b+v)\,\sigma u\,\sigma(u+v)}e^{\left(\frac{\alpha}{\rho}-\frac{1}{2}\mathfrak{D}\right)u}, \\ \cos AZ - i\cos BZ = \dfrac{2}{E}\left[\dfrac{\sigma u}{\sigma(u+v)}e^{u\zeta v}\right]^{\beta}\dfrac{\sigma a\,\sigma(b+v)\,\sigma(u+b+v)\,\sigma(u-a)}{\sigma(a-b)\,\sigma(a+b+v)\,\sigma u\,\sigma(u+v)}e^{\left(\frac{1}{2}\mathfrak{D}-\frac{\alpha}{\rho}\right)u}. \end{cases}$$

En posant, comme on l'a déjà fait pour le cas du mouvement à la Poinsot,

$$\mathfrak{S} = \cos CX + i\cos CY,$$
$$\mathfrak{S}_0 = \cos CX - i\cos CY,$$

et supposant les deux systèmes d'axes *congruents*, j'ai encore, ainsi qu'on l'a trouvé en l'endroit cité,

$$\mathfrak{S}_0\frac{d\mathfrak{S}}{dt} - \mathfrak{S}\frac{d\mathfrak{S}_0}{dt} = -2i\left(\frac{\partial T}{\partial y_1}\cos AZ + \frac{\partial T}{\partial y_2}\cos BZ\right).$$

ou, en divisant par $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_0 = 1 - \cos^2 CZ = \cos^2 AZ + \cos^2 BZ$,

$$\frac{1}{\mathfrak{S}}\frac{d\mathfrak{S}}{dt} - \frac{1}{\mathfrak{S}_0}\frac{d\mathfrak{S}_0}{dt} = -2i\sqrt{m}\,\frac{x_1\dfrac{\partial T}{\partial y_1} + x_2\dfrac{\partial T}{dy_2}}{x_1^2 + x_2^2}$$
$$= -2i\sqrt{m}\left(q + r\frac{x_1y_1 + x_2y_2}{x_1^2 + x_2^2}\right),$$

d'où résulte

$$\frac{1}{\mathfrak{S}}\frac{d\mathfrak{S}}{du} - \frac{1}{\mathfrak{S}_0}\frac{d\mathfrak{S}_0}{du} = -2\left[\frac{qs\sqrt{m}}{ry_3\rho} + \frac{s\sqrt{m}}{\rho}\,\frac{x_3 - \dfrac{n}{y_3}}{x_3^2 - m}\right].$$

Pour décomposer en éléments simples le dernier terme, on a ici un calcul analogue à celui qui concernait précédemment $\wp(u)$. Les résidus ont pour expression

$$-\frac{s\sqrt{m}}{\rho}\,\frac{x_3 - \dfrac{n}{y_3}}{x_3\dfrac{dx_3}{du}} = -\frac{s\sqrt{m}}{\rho}\,\frac{x_3 - \dfrac{n}{y_3}}{x_3[\wp u - \wp(u+v)]}.$$

Il faut y substituer successivement, à la place de u, a et $-(b+v)$ racines de Φ, puis b et $-(a+v)$ racines de Φ_1. Pour le premier et le quatrième pôle, x_3 est égal à $\sqrt{m}$; pour le deuxième et le troisième, x_3 est égal à $-\sqrt{m}$; c'est ce qu'on voit par les équations (83). Les résidus sont donc successivement -1, $+1$, -1, $+1$. En outre, la fonction s'évanouit pour x_3 infini, c'est-à-dire pour $u=0$. Donc

$$-\frac{2s\sqrt{m}}{\rho}\frac{x_3-\dfrac{n}{y_3}}{x_3^2-m}=\zeta(u+a+v)+\zeta(u+b+v)$$
$$-\zeta(u-a)-\zeta(u-b)-\mathrm{D}_1.$$

(99) $$\mathrm{D}_1=\zeta a+\zeta b+\zeta(a+v)+\zeta(b+v).$$

Posons encore, pour abréger,

(100) $$\gamma=\frac{qs\sqrt{m}}{ry_2},$$

et l'on aura, en intégrant,

$$\log\frac{\Theta}{\Theta_0}=-\left(\frac{2\gamma}{\rho}+\mathrm{D}_1\right)u+\log\frac{\sigma(u+a+v)\,\sigma(u+b+v)}{\sigma(u-a)\,\sigma(u-b)}+\text{const.}$$

D'autre part, le produit $\Theta\Theta_0$ est égal au produit des facteurs

$$\cos\mathrm{AZ}\pm i\cos\mathrm{BZ}.$$

Prenant, pour ces derniers, leurs expressions (98), nous avons

$$\log\Theta\Theta_0=\log\frac{\sigma(u+a+v)\,\sigma(u-b)\,\sigma(u+b+v)\,\sigma(u-a)}{\sigma^2u\,\sigma^2(u+v)}+\text{const.}$$

De là résulte $\log\Theta^2$, et enfin Θ et Θ_0 comme il suit, en donnant une forme convenable à la constante arbitraire E_1,

(101) $$\begin{cases}\cos\mathrm{CX}+i\cos\mathrm{CY}=2\mathrm{E}_1\dfrac{\sigma a\,\sigma b\,\sigma(u+a+v)\,\sigma(u+b+v)}{\sigma(a-b)\,\sigma(a+b+v)\,\sigma u\,\sigma(u+v)}e^{-\left(\frac{\gamma}{\rho}+\frac{1}{2}\mathrm{D}_1\right)u}.\\[2ex] \cos\mathrm{CX}-i\cos\mathrm{CY}=-\dfrac{2}{\mathrm{E}_1}\dfrac{\sigma(a+v)\,\sigma(b+v)\,\sigma(u-a)\,\sigma(u-b)}{\sigma(a-b)\,\sigma(a+b+v)\,\sigma u\,\sigma(u+v)}e^{\left(\frac{\gamma}{\rho}+\frac{1}{2}\mathrm{D}_1\right)u}.\end{cases}$$

On a vu, dans le § III, que la connaissance des quantités $\cos CZ$, $\cos AZ \pm i \cos BZ$ et $\cos CX \pm i \cos CY$ détermine entièrement et sans ambiguïté la position relative des deux systèmes d'axes, quand on connaît le caractère de congruence. Ici nous avons supposé les axes congruents. La rotation du corps est donc actuellement déterminée.

Translation du corps solide.

Il faut maintenant trouver, en fonction de u, les coordonnées X, Y, Z de l'origine des axes fixes dans le corps, mobiles dans l'espace. Les deux premières coordonnées sont données explicitement en fonction des quantités précédentes, la troisième exige une intégration. Pour les deux premières [1], on a les formules

$$X = \frac{1}{\sqrt{m}}(y_1 \cos AY + y_2 \cos BY + y_3 \cos CY),$$

$$Y = -\frac{1}{\sqrt{m}}(y_1 \cos AX + y_2 \cos BX + y_3 \cos CX).$$

Par une transformation facile, fondée sur l'emploi de la relation élémentaire (8) avec l'hypothèse actuelle $\varepsilon = +1$, on conclut de là

$$\begin{aligned}(X + iY)(\cos CX - i \cos CY) \\ = \frac{1}{\sqrt{m}}[y_1(\cos BZ + i \cos AZ \cos CZ) \\ + y_2(-\cos AZ + i \cos BZ \cos CZ) - iy_3(1 - \cos^2 CZ)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(X + iY)(\cos CX - i \cos CY) \\ = \frac{1}{\sqrt{m}}\left[\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{\sqrt{m}} + i x_3 \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{m} - iy_3\left(1 - \frac{x_3^2}{m}\right)\right],\end{aligned}$$

ou bien encore, suivant les relations (76),

$$(X + iY)(\cos CX - i \cos CY) = \frac{1}{\sqrt{m}}\left[\frac{1}{r\sqrt{m}}\frac{dx_3}{dt} + i\left(\frac{n}{m}x_3 - y_3\right)\right].$$

---

[1] KIRCHHOFF, *Vorlesungen über mathematische Physik*, p. 240.

De là enfin se conclut, en prenant aussi l'expression conjuguée,

$$(102)\quad \begin{cases} (X \pm iY)(\cos CX \mp i\cos CY) \\ \quad = \dfrac{i\rho^2 y_3}{sm}\left[\wp u - \wp(u+v) \mp \dfrac{s}{\rho^2}\left(\sqrt{m} - \dfrac{x_3}{\sqrt{m}}\dfrac{u}{y_3}\right)\right]. \end{cases}$$

Le facteur $\cos CX \mp i\cos CY$ est une fonction doublement périodique de seconde espèce, tandis que le second membre est doublement périodique. Donc $X \pm iY$ est doublement périodique de seconde espèce. Les deux quantités conjuguées $\cos CX \mp i\cos CY$ ont des multiplicateurs réciproques, puisque leur produit $1 - \cos^2 CZ$ est doublement périodique. Donc $X + iY$ a les mêmes multiplicateurs que

$$\cos CX + i\cos CY.$$

Nous allons décomposer $X + iY$ en éléments simples.

L'élément simple type se déduit immédiatement de la forme (101) de $\cos CX + i\cos CY$: c'est

$$\frac{\sigma(u+a+b+v)}{\sigma u}e^{-\left(\frac{Y}{\rho}+\frac{1}{2}D_1\right)u}.$$

Les pôles de $X+iY$ sont $u=0$ et $u=-v$; ce sont des pôles simples, attendu qu'ils sont doubles au second membre (102), et simples dans le facteur $\cos CX - i\cos CY$. Leur résidu est $\pm\frac{i\rho^2 y_3}{sm}$, coefficient de $\wp u$ et $\wp(u+v)$ du second membre (102), divisé par le résidu de

$$\cos CX - i\cos CY.$$

Il n'y a pas d'autres pôles, comme on va voir.

Observons les valeurs du second membre (102) pour les valeurs particulières de u suivantes : a, $-(a+v)$, b, $-(b+v)$. Pour les deux premières, on a, suivant les égalités (83),

$$x_3 = \sqrt{m}:$$

pour les deux autres,

$$x_3 = -\sqrt{m}.$$

Par conséquent, pour les deux premières, $\sqrt{m} - \frac{nx_3}{y_3\sqrt{m}}$ se confond avec $x_3 - \frac{n}{y_3}$; pour les deux dernières, avec $-\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right)$. D'autre part, suivant les égalités (88) et (89), $\frac{s}{\rho^2}\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right)$ est alors égal à

$$\pm\,[\mathrm{p}u - \mathrm{p}(u+v)],$$

le signe + convenant à $u = a$ et $u = -(b+v)$, le signe — à $u = b$ et à $u = -(a+v)$. Il en résulte, pour la quantité entre crochets, les valeurs suivantes :

$$u = a, \qquad \mathrm{p}u - \mathrm{p}(u+v) \mp \frac{s}{\rho^2}\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right) = \begin{cases} 0 \\ 2[\mathrm{p}a - \mathrm{p}(a+v)] \end{cases}$$

$$u = -(a+v), \qquad \mathrm{p}u - \mathrm{p}(u+v) \mp \frac{s}{\rho^2}\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right) = \begin{cases} 2[\mathrm{p}(a+v) - \mathrm{p}a] \\ 0 \end{cases}$$

$$u = b, \qquad \mathrm{p}u - \mathrm{p}(u+v) \pm \frac{s}{\rho^2}\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right) = \begin{cases} 0 \\ 2[\mathrm{p}b - \mathrm{p}(b+v)] \end{cases}$$

$$u = -(b+v), \qquad \mathrm{p}u - \mathrm{p}(u+v) \pm \frac{s}{\rho^2}\left(x_3 - \frac{n}{y_3}\right) = \begin{cases} 2[\mathrm{p}(b+v) - \mathrm{p}b] \\ 0 \end{cases}.$$

On voit par là que le second membre (102) s'évanouit pour $u = a$ et $u = b$, quand on prend le signe supérieur, et pour $u = -(a+v)$ ou $u = -(b+v)$, quand on prend le signe inférieur. Il en est de même pour $\cos CX \mp i \cos CY$.

Il s'ensuit que $X \pm iY$ n'a que les pôles $u = 0$ et $u = -v$, et l'on conclut

$$\frac{2\,sm}{i\rho^2 y_3 E_1}(X + iY)\,e^{\left(\frac{Y}{\rho} + \frac{1}{2}D_1\right)u}$$
$$= -\frac{\sigma(a-b)\,\sigma v}{\sigma(a+v)\,\sigma(b+v)}\left[\frac{\sigma(u+a+b+v)}{\sigma a\,\sigma b\,\sigma u} - \frac{\sigma(u+a+b+2v)}{\sigma(a+v)\,\sigma(b+v)\,\sigma(u+v)}\right],$$

$$\frac{2\,sm\,E_1}{i\rho^2 y_3}(X - iY)\,e^{-\left(\frac{Y}{\rho} + \frac{1}{2}D_1\right)u}$$
$$= -\frac{\sigma(a-b)\,\sigma v}{\sigma a\,\sigma b}\left[\frac{\sigma(u-a-b-v)}{\sigma(a+v)\,\sigma(b+v)\,\sigma u} - \frac{\sigma(u-a-b)}{\sigma a\,\sigma b\,\sigma(u+v)}\right].$$

On remarquera que les seconds membres, dans ces deux égalités, se

déduisent l'un de l'autre par le changement du signe, accompagné du changement de a et b en $-(a+v)$, $-(b+v)$. C'est ce dont on se rend aisément compte par les expressions de $\cos CX \pm i \cos CY$ et celles des constantes.

La coordonnée Z de l'origine des axes mobiles exige une quadrature; elle est donnée par la formule

$$\frac{dZ}{dt} = U \cos AZ + V \cos BZ + W \cos CZ.$$

Par des transformations successives, cette formule devient

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{m}}[x_1(px_1+qy_1)+x_2(px_2+qy_2)+x_3(p'x_3+q'y_3)]\\ &= \frac{1}{\sqrt{m}}[(p'-p)x_3^2+(q'-q)y_3x_3+pm+qn]\\ &= \frac{1}{\sqrt{m}}[(p'-p)(x_3+\tfrac{1}{4}h)^2+pm+qn-\tfrac{1}{16}h^2(p'-p)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{du} = &\frac{s}{iry_3\rho\sqrt{m}}[pm+qn-\tfrac{1}{16}h^2(p'-p)]\\ &+\frac{s\rho(p'-p)}{iry_3\sqrt{m}}[\wp u+\wp(u+v)+\wp v].\end{aligned}$$

En intégrant et figurant par δ et δ_1 les deux constantes, nous avons

$$Z + \text{const.} = \delta t + \delta_1\rho[\zeta(u+v)+\zeta u - u\wp v], \tag{103}$$

$$\left\{\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{\sqrt{m}}[pm+qn-\tfrac{1}{16}h^2(p'-p)],\\ \delta_1 &= -\frac{s(p'-p)}{iry_3\sqrt{m}} = \frac{y_3}{is\sqrt{m}}.\end{aligned}\right. \tag{104}$$

Nous avons, on le voit, résolu le problème qui consiste à déterminer explicitement en fonction du temps la position du solide.

Notions générales sur le mouvement du corps solide.

Indépendamment de toute discussion approfondie sur les formules que l'on vient d'établir, on peut se faire une idée sommaire du mouvement que ces formules représentent.

Soit θ le rapport de l'accroissement du temps à celui de $\frac{u}{\rho}$ (87).

$$(105) \qquad \theta = \frac{1}{\sqrt{r(p'-p)}} = \frac{s}{i r \vartheta_3}, \qquad t = \theta \frac{u}{\rho} + \text{const.}$$

Nous supposons réelle la constante arbitraire ρ. L'argument u, ou du moins sa partie variable, prend des valeurs soit réelles, soit purement imaginaires suivant que θ est lui-même réel ou purement imaginaire, suivant donc que $(p'-p)$ est positif ou négatif (r est positif, car la force vive T est nécessairement représentée par une *forme positive*).

Comme les invariants sont réels, il y a une période déterminée $2\tilde{\omega}$, de même espèce, réelle ou imaginaire, que les valeurs de du; il y correspond une période de temps $t_0 = \frac{2\theta\tilde{\omega}}{\rho}$.

Considérons d'abord le mouvement angulaire de l'axe C ou *axe du corps*. Le cosinus de l'angle CZ (97) est une fonction doublement périodique, dont une période seule intervient. L'angle CZ reprend donc la même valeur à la fin de chaque période de temps.

Considérons maintenant l'angle ψ que l'intersection des plans AB et XY fait avec l'axe X. Cet angle est donné par la formule

$$e^{2i\psi} = -\frac{\cos CX + i\cos CY}{\cos CX - i\cos CY}.$$

On voit par là qu'à chaque période de temps l'angle ψ se reproduit, augmenté d'une constante ψ_0, de telle sorte que les fonctions doublement périodiques de seconde espèce $\cos CX \pm i\cos CY$ admettent les multiplicateurs $e^{\pm i\psi_0}$ correspondant à la période $2\tilde{\omega}$.

Ces deux angles CZ et ψ définissent complètement le mouvement angulaire de l'axe C du corps. C'est, comme on voit, un mouvement varié, mais qui coïncide périodiquement avec une rotation uniforme, de vitesse $\frac{\psi_0}{t_0}$, autour de l'axe Z.

Envisageons actuellement le mouvement de l'origine des axes mobiles ou *centre du corps*. La coordonnée Z est représentée par une fonction (103) qui se reproduit, à chaque période de temps, augmentée d'une constante Z_0. Les deux quantités $X \pm iY$ se reproduisent mul-

tipliées chacune par une constante; mais, comme on l'a vu, ces fonctions ont les mêmes multiplicateurs respectivement que

$$\cos CX \pm i \cos CY,$$

c'est-à-dire $e^{\pm i\psi_0}$. Le mouvement du centre est varié, mais coïncide périodiquement avec un mouvement hélicoïdal uniforme, dont l'axe est Z et dans lequel au temps t_0 correspond une progression Z_0, parallèle à l'axe, et une rotation ψ_0 autour de cet axe.

En réunissant les circonstances relatives au mouvement angulaire de l'axe et au mouvement du centre, je conclus que le mouvement de l'axe lui-même coïncide périodiquement avec un mouvement hélicoïdal uniforme, ou mieux se compose de ce mouvement et d'un mouvement périodique.

Considérons enfin l'angle φ que l'intersection des plans AB et XY fait avec l'axe A du corps. Cet angle est donné par la formule

$$e^{2i\varphi} = -\frac{\cos AZ + i \cos BZ}{\cos AZ - i \cos BZ}.$$

Les deux fonctions $\cos AZ \pm i \cos BZ$ (98) ne sont pas, suivant l'acception ordinaire, doublement périodiques de seconde espèce, sauf si l'exposant β est un nombre entier. Mais, dans tous les cas, elles ont toujours la propriété de se reproduire, à chaque période, multipliées par des facteurs constants. L'angle φ se reproduit donc, à chaque période de temps, augmenté d'une constante φ_0. Cette circonstance, jointe aux précédentes, permet de tirer la conclusion que voici :

Le mouvement du solide se compose : 1° *d'un mouvement hélicoïdal uniforme autour de l'axe* Z; 2° *d'une rotation uniforme* $\left(\text{à vitesse } \frac{\varphi_0}{t_0}\right)$ *autour de l'axe du corps;* 3° *d'un mouvement périodique* (à période t_0).

Énumération des constantes. Homogénéité.

Dans la suite des calculs qu'on vient de parcourir, il importe de ne pas perdre de vue les constantes primitives et leur liaison avec celles qu'on a été conduit à mettre en leur place.

Les constantes données sont au nombre de dix, savoir : 1° les six coefficients de l'expression de la force vive (75) p, p', q, q', r, r' ; 2° les quatre constantes d'intégration l, m, n, y_3 (72), (73) et (74).

Dans nos formules, on voit figurer *implicitement* les deux invariants des fonctions elliptiques et *explicitement* les trois arguments constants c, a, b. Les arguments a_1 et b_1 peuvent être omis comme déterminés par les précédents. Ce sont donc là cinq constantes.

La constante d'homogénéité ρ peut être omise comme entièrement arbitraire, ou bien on peut encore observer que les fonctions elliptiques interviennent, dans toutes les formules, avec la lettre ρ, de manière que l'homogénéité soit respectée : toutes les combinaisons qui s'offrent sont, à ce point de vue, du degré zéro, chaque argument étant censé, ainsi que ρ, du degré 1.

Avec ces cinq constantes elliptiques, les formules présentent cinq autres constantes que nous pouvons distinguer, savoir $\alpha, \gamma, \theta, \delta, \delta_1$.

Nous allons reconnaître que ce second système de dix constantes détermine complètement, et sans ambiguïté, le premier. Dans le paragraphe suivant, nous établirons le résultat inverse.

En premier lieu, au moyen des cinq constantes elliptiques, on détermine $m, \frac{n}{y_3}$, avec les constantes auxiliaires m_1, h, s, par les formules (84) et (90), que nous transcrivons ici :

$$2\sqrt{m} = \rho(z_a - z_b),$$

$$\tfrac{1}{2}h = \rho(z_a + z_b),$$

$$2\sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + m_1} = \rho(z_{a_1} - z_{b_1}),$$

$$s\sqrt{m} = \tfrac{1}{2}\rho^2[\wp b + \wp a - \wp(a+c) - \wp(b+c)],$$

$$\frac{sn}{y_3} = \tfrac{1}{2}\rho^2[\wp b - \wp a + \wp(a+c) - \wp(b+c)].$$

L'exposant β, qui figure dans les formules (98), est déterminé par ces quantités, puisqu'on a (94)

$$\beta = -\frac{h}{2s}.$$

Les constantes auxiliaires m_1, n_1, s sont liées aux constantes primi-

tives par les relations (80) et (85)

$$m_1 = \frac{pm + 2qn + r'y_3^2 - l}{p - p'},$$

$$h = 2\frac{q - q'}{p - p'}y_3,$$

$$s = \frac{iry_3}{\sqrt{r(p' - p)}}.$$

Quant aux constantes que nous avons distinguées dans les formules, voici leurs expressions (94), (100), (104) et (105)

$$\alpha = \frac{s}{r}\left[r' - \frac{h(q' - q)}{4y_3}\right] = \frac{sr'}{r} + \frac{1}{8}\frac{h^2}{2s},$$

$$\gamma = \frac{qs\sqrt{m}}{ry_3},$$

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{r(p' - p)}} = \frac{s}{iry_2},$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{m}}\left[pm + qn - \frac{1}{16}h^2(p' - p)\right],$$

$$\delta_1 = -\frac{s(p' - p)}{iry_3\sqrt{m}} = \frac{y_3}{is\sqrt{m}}.$$

Par les cinq premières constantes sont déterminés, nous venons de le voir, $\sqrt{m}$, $\frac{n}{y^3}$, m_1, h, s. Maintenant, au moyen de δ_1, est déterminé y_3 et, par conséquent, n. Au moyen de θ et γ, sont ensuite déterminés r et q, puis q' par la relation

$$h = 2ry_3(q' - q)\theta^2.$$

Enfin r' est déterminé au moyen de α, p et p' au moyen de s et δ. l au moyen de m_1.

Il est donc établi que la connaissance complète du mouvement du corps entraîne aussi la connaissance des constantes qui figurent dans les équations différentielles et les intégrales.

Il n'en serait pas de même si l'on connaissait seulement la rotation du corps, non sa translation.

Et d'abord, il est évident que la connaissance de la rotation ne peut entraîner la connaissance d'aucune longueur. Par conséquent, la rotation ne peut déterminer que des combinaisons de degré zéro entre les constantes, ce qui en réduit le nombre d'une unité. En outre, δ et δ_1 n'interviennent pas dans les formules de rotation. La rotation dépend donc seulement de sept constantes, et c'est ce qu'en effet on reconnaîtra plus loin.

Il est aisé de trouver, à ce point de vue, les degrés des diverses constantes.

Par rapport à l'unité de longueur, la force vive est homogène et du degré 2, les vitesses U, V, W sont du degré 1, les vitesses de rotation P, Q, R sont du degré zéro. Il en résulte pour x_1, x_2, x_3 le degré 1, pour y_1, y_2, y_3 le degré 2, pour p, p' le degré zéro, pour q, q' le degré -1, pour r, r' le degré -2. Les degrés des autres constantes en résultent, savoir

l,	m,	n,	m_1,	h,	$\frac{n}{y_3}$,	s,	θ,	δ,	δ_1,	α,	γ,	β.
2,	2,	3,	2,	1,	1,	1,	1,	1,	0,	1,	1,	0.

Si les arguments elliptiques sont considérés comme de simples nombres, ρ est une longueur.

Expression des éléments elliptiques en fonction des données.

Pour avoir plus de symétrie dans les formules, j'emploie, au lieu de m, m_1, n, h, les notations suivantes :

$$(106)\qquad \tfrac{1}{2}h = \nu_1, \qquad \frac{n}{y_3} = \nu, \qquad \sqrt{m} = \mu, \qquad \sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + m_1} = \mu_1.$$

Ces quantités, ainsi que s, sont toutes des longueurs.

Par leur emploi, le polynôme (81), divisé par $r(p'-p)$, s'écrit ainsi

$$(x_3^2 + 4\nu_1 x_3 - \mu_1^2 + 4\nu_1^2)(x_3^2 - \mu^2) + s^2(x_3 - \nu)^2.$$

Pour faire disparaître le second terme, on pose $x_3 = y - \nu$; le polynôme devient

$$(y^2 + 2\nu_1 y + \nu_1^2 - \mu_1^2)(y^2 - 2\nu_1 y + \nu_1^2 - \mu^2) + s^2(y - \nu - \nu_1)^2$$

et doit être identique à cet autre (63)

$$y^4 - 6\rho^2 \wp v . y^2 + 4\rho^3 \wp' v . y + \rho^4(g_2 - 3\wp^2 v).$$

De la comparaison se tire immédiatement

$$(107) \qquad 6\rho^2 \wp v = 2\nu_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2 - s^2,$$

$$(108) \qquad 2\rho^3 \wp' v = \nu_1(\mu_1^2 - \mu^2) - s^2(\nu + \nu_1),$$

et cette combinaison, qui servira plus loin,

$$(109) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\rho^4(12\wp^2 v - g_2) \\ &\quad = \tfrac{1}{4}(2\nu_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2 - s^2)^2 \\ &\qquad - (\nu_1^2 - \mu^2)(\nu_1^2 - \mu_1^2) - s^2(\nu + \nu_1)^2. \end{aligned} \right.$$

Par le théorème d'addition, on a

$$\wp a + \wp(a + v) + \wp v = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' a - \wp' v}{\wp a - \wp v}\right)^2 = z_a^2.$$

Mais, d'après (84),

$$\rho z_a = \sqrt{m} + \tfrac{1}{4} h = \nu_1 + \mu;$$

j'ai donc, au moyen de (107),

$$\rho^2[\wp a + \wp(a + v)] = \tfrac{1}{6}[(2\nu_1 + 5\mu)(2\nu_1 + \mu) - s^2 - \mu_1^2],$$

tandis que l'égalité (88 a) donne

$$\rho^2[\wp a - \wp(a + v] = s(\mu - \nu).$$

Voici donc connus $\wp a$ et $\wp(a + v)$. Il suffit de changer les signes devant s et μ pour changer a en b. J'ai donc aussi

$$\rho^2[\wp b + \wp(b + v)] = \tfrac{1}{6}[(2\nu_1 - 5\mu)(2\nu_1 - \mu) - s^2 - \mu_1^2],$$
$$\rho^2[\wp b - \wp(b + v)] = s(\mu + \nu).$$

Par le théorème d'addition, on a

$$2z_a = \frac{\wp' a + \wp'(a+c)}{\wp a - \wp(a+c)} = \frac{\wp' a - \wp' c}{\wp a - \wp c} = \frac{\wp' a - \wp'(a+c) - 2\wp' c}{\wp a + \wp(a+c) - 2\wp c}.$$

En remplaçant ici ρz_a par $\nu_1 + \mu$, on conclut

$$\rho^3[\wp' a + \wp'(a+c)] = 2s(\mu - \nu)(\mu + \nu_1),$$
$$\rho^3[\wp' a - \wp'(a+c)] = s^2(\mu - \nu) + \mu(\mu^2 - \mu_1^2) + 4\nu_1\mu(\mu + \nu_1),$$

et semblablement

$$\rho^3[\wp' b + \wp'(b+c)] = -2s(\mu + \nu)(\mu - \nu_1),$$
$$\rho^3[\wp' b - \wp'(b+c)] = -s^2(\mu + \nu) - \mu(\mu^2 - \mu_1^2) + 4\nu_1\mu(\mu - \nu_1).$$

Des calculs tout analogues donnent les fonctions $\wp$ et $\wp'$ pour les arguments a_1, b_1; mais nous n'en aurons pas besoin. Il nous faudra bientôt connaître les mêmes fonctions pour les deux arguments

$$c_0 = -(a+b+c), \qquad c_1 = a - b.$$

Le calcul n'offre aucune difficulté par le moyen des formules précédentes; il donne lieu à des réductions remarquables. Je transcris seulement les résultats

$$(110)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\rho}{2}\,\frac{\wp'(b+c) - \wp' a}{\wp(b+c) - \wp a} &= \mu - \frac{1}{2}\,\frac{s\nu}{\mu}, \\ \frac{\rho}{2}\,\frac{\wp'(a+c) - \wp' b}{\wp(a+c) - \wp b} &= -\mu - \frac{1}{2}\,\frac{s\nu}{\mu}, \\ \frac{\rho}{2}\,\frac{\wp' a + \wp' b}{\wp a - \wp b} &= \mu + \frac{1}{2}s, \\ \frac{\rho}{2}\,\frac{\wp'(a+c) + \wp'(b+c)}{\wp(a+c) - \wp(b+c)} &= -\mu + \frac{1}{2}s, \end{aligned}\right.$$

$$(111)\quad \left\{\begin{aligned} \rho^2(\wp c_0 - \wp c) &= -\nu_1^2 + \frac{1}{4}\,\frac{s^2\nu^2}{\mu^2}, \\ \rho^2(\wp c_1 - \wp c) &= -\nu_1^2 + \tfrac{1}{4}s^2, \end{aligned}\right.$$

$$(112)\quad \rho^3\wp' c_0 = \nu_1 s\left(\mu + \frac{\nu\nu_1}{\mu}\right) + \frac{1}{4}\,\frac{s\nu}{\mu}\left(\mu^2 - \mu_1^2 + s^2 - \frac{s^2\nu^2}{\mu^2}\right),$$

$$(113)\quad \rho^3\wp' c_1 = \nu_1 s(\nu + \nu_1) + \tfrac{1}{4}s(\mu^2 - \mu_1^2).$$

Je n'ai pas calculé les invariants des fonctions elliptiques. Ils sont surabondamment déterminés par ce qui précède. En général, quand on donne les fonctions $\wp$ et $\wp'$ pour trois arguments différents, les invariants s'en déduisent au moyen de la relation

$$\wp'^2 u = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3,$$

employée successivement pour chacun des trois arguments.

Dans le paragraphe précédent on a vu que les cinq constantes elliptiques déterminent un groupe de cinq constantes du problème, précisément s et les constantes (106) employées ici. On voit maintenant que la réciproque est également vraie. Conséquemment, les formules du mouvement, trouvées ici, sont propres à tous les cas qui peuvent se présenter.

Discussion des formules.

La discussion, que je vais faire, a pour but de préciser la nature des constantes en distinguant les divers cas qui peuvent se présenter.

Dans tous les cas, la constante m est positive et la variable x_3 ne peut acquérir que des valeurs comprises entre $-\sqrt{m}$ et $+\sqrt{m}$; c'est ce qui résulte de l'intégrale (73). D'autre part, la même variable x_3 doit prendre des valeurs qui rendent positif le polynôme (81)

$$F(x_3) = r(p' - p)(m_1 - hx_3 - x_3^2)(m - x_3^2) - r^2(u - y_3 x_3)^2,$$

tandis que les valeurs $x_3 = \pm\sqrt{m}$ rendent ce polynôme négatif. Il y a donc toujours, entre $-\sqrt{m}$ et $+\sqrt{m}$, au moins deux racines réelles de F; c'est entre ces deux racines qu'oscille la variable x_3.

Je distinguerai trois cas principaux, suivant le signe de $(p' - p)$ et du discriminant Δ.

I. $p' - p > 0$.

D'après l'égalité (79),

$$y_1^2 + y_2^2 = \frac{p' - p}{r}(m_1 - hx_3 - x_3^2),$$

les valeurs que prend x_3 rendent négatif le polynôme f_1

$$f_1 = x_3^2 + hx_3 - m_1.$$

En effet, $p'-p$ est supposé positif et r est positif, on l'a déjà fait observer, comme étant le coefficient d'un carré dans une forme quadratique positive T, la force vive. Il en est donc de f_1 comme du polynôme f

$$f = x_3^2 - m;$$

ses racines sont réelles et comprennent entre elles les deux racines de F entre lesquelles oscille x_3.

Le coefficient de x_3^3, dans F, est positif. Le polynôme F est négatif pour les valeurs de x_3 égales aux racines de f et de f_1. Donc F a deux autres racines réelles, comprenant entre elles les quatre racines de f et de f_1. Soient x', x'', x''', x^{iv} les racines de F; on aura ainsi

$$x' < \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{m} \\ -\frac{1}{2}h - \sqrt{\frac{1}{4}h^2 + m_1} \end{array} \right\} < x'' < x''' < \left\{ \begin{array}{l} +\sqrt{m} \\ -\frac{1}{2}h + \sqrt{\frac{1}{4}h^2 + m_1} \end{array} \right\} < x^{\text{iv}},$$

et x_3 oscille entre les deux racines moyennes x'', x'''.

Les quatre racines de F étant réelles, le discriminant est positif. En outre [1] ($2\omega'$ étant la période imaginaire), $u + \frac{v}{2} - \omega'$ varie d'un multiple impair à un multiple pair de la demi-période réelle ω, quand x_3 varie de x''' à x''. La relation précise entre t et u doit s'écrire

$$u = \omega' - \frac{v}{2} + \frac{\rho}{\eta} t, \tag{114}$$

de manière que l'origine des temps corresponde à $x_3 = x''$. Cette indication est placée ici uniquement pour montrer comment on peut, si on le désire, préciser entièrement les arguments. Il est également permis d'ajouter à u et v des périodes à volonté; en tous cas, u est réel sauf un multiple impair de ω'. Pour mieux préciser, nous continuerons à faire les premières suppositions, qui ne nuisent en rien à la généralité.

Les arguments a et b correspondent aux racines de f (83), qui sont, l'une entre x' et x'', l'autre entre x''' et x^{iv}. Ces arguments ont donc les

---

[1] *Traité des fonctions elliptiques*, p. 129.

formes ci-après [1], sous la supposition que $\sqrt{m}$ soit pris positivement dans les formules (83),

$$(115) \qquad a = -\frac{c}{2} + ia'', \qquad b = -\frac{c}{2} + \omega + ib'',$$

a'' et b'' étant réels. De même, pour a_1 et b_1,

$$(116) \qquad a_1 = -\frac{c}{2} + ia''_1, \qquad b_1 = -\frac{c}{2} + \omega + ib''_1.$$

Suivant les égalités (62) et (66), on aura

$$a'' + a''_1 = b'' + b''_1 = 2c'',$$

$$c = -\frac{c}{2} + ic'', \qquad a' = i\frac{a''_1 - a''}{2},$$

$$w = \frac{c}{2} + ic'', \qquad b' = i\frac{b''_1 - b''}{2}.$$

En prenant arbitrairement les deux arguments purement imaginaires a', b', dont les fonctions $\mathfrak{p}$ sont réelles, puis $c + \frac{c}{2}$ purement imaginaire et arbitraire, on déterminera, par la relation harmonique (67), $\mathfrak{p}w$ conjugué de $\mathfrak{p}c$; il en résultera, pour w, la forme $\frac{c}{2} + ic''$, celle de c étant $-\frac{c}{2} + ic''$. De cette manière, a, b, a_1, b_1, c auront bien les formes ci-dessus.

Résumons les caractères que nous venons de mettre en évidence et qui ne se reproduiront dans aucun des autres cas; joignons-y ce qui concerne les autres constantes, et concluons ainsi : *prenant des fonctions elliptiques à discriminant positif; c réel; u, a, b, a_1, b_1 sous les formes* (114), (115) et (116); *les constantes* θ, δ, δ_1 *réelles et* α, γ *purement imaginaires, on aura la représentation du mouvement dans l'un quelconque des cas où* $(p' - p)$ *est positif.*

---

[1] *Loc. cit.*

$$\text{II. } p'-p<0, \qquad \Delta>0.$$

Le polynôme F, dans ce cas encore, a quatre racines réelles. Supposons ces racines dénommées, comme tout à l'heure, x', x'', x''', x^{iv} et rangées ainsi par ordre de grandeur, mais *dans l'ordre croissant ou décroissant*. La variable x_3 reste comprise entre deux des racines extrêmes, x''' et x^{iv}. Les deux quantités $\pm\sqrt{m}$ sont, l'une au delà de x^{iv}, l'autre soit entre x'' et x''', soit en deçà de x'. De là deux cas fort distincts.

Dans le premier de ces cas, f est positif quand x_3 est compris dans l'intervalle $x'x''$, intervalle où F est positif. Comme $p'-p$ est négatif, il faut que f_1 soit négatif dans cet intervalle. Il s'ensuit que les racines de f_1 sont réelles et comprises, l'une entre x'' et x''', l'autre en deçà de x'.

Dans le second cas, au contraire, celui où les deux racines de f, c'est-à-dire $\pm\sqrt{m}$, comprennent entre elles les quatre racines de F, les racines de f_1 peuvent être imaginaires. Si elles sont réelles, elles sont toutes deux, en même temps, ou bien entre x'' et x''', ou bien au-delà de x^{iv}, ou bien en deçà de x'.

Il est aisé de reconnaître comment on peut choisir les arguments a, b, a_1, b_1 pour que les formules correspondent à un quelconque de ces cas. On y parvient immédiatement au moyen d'une discussion faite dans mon *Traité des fonctions elliptiques*, p. 127-129, et d'ailleurs très facile.

En premier lieu, v est réel et u a l'une ou l'autre des deux formes suivantes (qui rentrent l'une dans l'autre si l'on altère v d'une période)

$$(117) \qquad \left\{\begin{aligned} u &= -\frac{v}{2} + i\frac{\rho}{\theta'}t, \\ u &= -\frac{v}{2} + \omega + i\frac{\rho}{\theta'}t, \end{aligned}\right\} \quad \left(\frac{\theta'}{i}=\theta\right),$$

où θ' est réel.

Premier cas : *L'une des deux quantités $\pm\sqrt{m}$ est dans l'intervalle $(x''x''')$.* — En ce cas, l'un des arguments a, b est réel, l'autre égal à

$\pm\omega'$, plus une quantité réelle; il en est de même pour a_1 et b_1. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $a + a_1 = b + b_1$ réel. Alors les arguments auxiliaires w et c (62) et (66) sont réels; a' et b', l'un réel, l'autre réel $\pm\omega'$. On obtient donc les formules propres à ce cas *en prenant les termes de la proportion harmonique* (67) *de telle sorte que* $\mathfrak{p}w$, $\mathfrak{p}c$ *et* $\mathfrak{p}a'$ *ou* $\mathfrak{p}b'$ *soient tous trois supérieurs à* e_1 *et que le quatrième* $\mathfrak{p}b'$ *ou* $\mathfrak{p}a'$ *soit compris entre* e_2 *et* e_3. *L'argument* u *a l'une des formes* (117), *les constantes* θ, δ, δ_1 *sont purement imaginaires*, α *et* γ *réelles.*

Deuxième cas : *Les deux quantités* $\pm\sqrt{m}$ *comprennent entre elles les quatre racines du polynôme* F. — En ce cas, les trois arguments a, b, c sont réels. Les arguments a_1 et b_1 sont des imaginaires quelconques si les racines de f_1 sont imaginaires; ils sont ou tous deux réels, ou tous deux réels $\pm\omega'$ si les racines de f_1 sont réelles. C'est ce qui résulte de la discussion ci-dessus, relative aux places que peuvent occuper les racines de f_1.

Il s'agit de trouver, de la manière la plus générale, les arguments a, b, a_1, b_1, c, pour satisfaire ainsi aux conditions (56) et (67). Posons, à cet effet,

$$(118)\quad \left\{\begin{aligned} u'_0 &= \tfrac{1}{2}(w - c - a' + b') = \tfrac{1}{2}(c + a - b),\\ u'_1 &= \tfrac{1}{2}(-w + c - a' + b') = \tfrac{1}{2}(-c + a - b),\\ v'_0 &= \tfrac{1}{2}(-w - c + a' + b') = \tfrac{1}{2}(-c - a - b),\\ v'_1 &= \tfrac{1}{2}(w + c + a' + b') = \tfrac{1}{2}(c + a_1 + b_1). \end{aligned}\right.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} u'_0 - v'_0 &= w - a', & u'_1 - v'_1 &= -(w + a'),\\ u'_0 + v'_0 &= -(c - b'), & u'_1 + v'_1 &= c + b',\\ u'_0 - v'_1 &= -(c + a'), & u'_1 - v'_0 &= c - a',\\ u'_0 + v'_1 &= w + b', & u'_1 + v'_0 &= -(w - b'). \end{aligned}$$

La forme sous laquelle est exprimée la quantité λ (p. 41) reste donc inaltérée si les arguments u'_0, u'_1, v'_0, v'_1 remplacent respectivement w,

c, a', b', et l'on a, entre leurs fonctions $\wp$, la relation

$$(119)\qquad (\wp u'_0 - \wp v'_0)(\wp u'_1 - \wp v'_1) + (\wp u'_0 - \wp v'_0)(\wp u'_1 - \wp v'_0) = 0.$$

Puisque a, b, c sont réels, u'_0, u'_1, v'_0 sont réels aussi. On devra donc prendre $\wp u'_0$, $\wp u'_1$, $\wp v'_0$, réels et supérieurs à e_1, quelconques d'ailleurs. Le quatrième terme $\wp v'_1$ en résulte. Il est réel. Les arguments a_1 et b_1 sont alors déterminés par les deux égalités

$$a_1 - b_1 = b - a, \qquad a_1 + b_1 = 2v'_1 - c.$$

Si $\wp v'_1$ est supérieur à e_1, v'_1 est réel, a_1 et b_1 sont réels aussi. Si $\wp v'_1$ est entre e_2 et e_1 ou inférieur à e_3, v'_1 est purement imaginaire ou purement imaginaire à une demi-période réelle près; alors a_1 et $-b_1$ sont imaginaires conjugués; si $\wp v'_1$ est entre e_3 et e_2, v'_1 est réel sauf une demi-période imaginaire et a_1, b_1 sont réels $\pm\omega'$.

On voit ainsi que les trois particularités, relatives aux racines de f_1, signalées plus haut se retrouvent nettement : *on obtient les formules propres au cas envisagé ici en supposant a, b, a_1, b_1, c déterminés par les arguments auxiliaires u'_0, u'_1, v'_0, v'_1* (118), *dont les trois premiers sont réels et le quatrième déterminé par la relation* (119). *Les constantes θ, δ, δ_1 sont purement imaginaires, α et γ réelles; u a la forme* (117).

III. $p' - p < 0, \qquad \Delta < 0.$

Le discriminant étant négatif, le polynôme F a seulement deux racines réelles x', x'', comprises toutes deux entre $\sqrt{m}$ et $-\sqrt{m}$. Le trinôme f_1 a ses racines ou imaginaires, ou bien réelles et ne comprenant pas x', x'' dans leur intervalle. Les arguments propres à ce cas se trouvent par les mêmes formules que pour le dernier cas; mais il ne faut pas oublier que le discriminant des fonctions elliptiques est négatif : les arguments u'_0, u'_1, v'_0 sont réels, leurs fonctions $\wp$ supérieures à e_2; suivant que $\wp v'_1$ est supérieur ou inférieur à e_2, les racines de f_1 sont réelles ou imaginaires. Les constantes θ, δ, δ_1 sont purement imaginaires, α et γ réelles, $u + \frac{c}{2}$ est purement imaginaire.

Ici se termine la discussion que j'avais en vue. J'ai distingué, au début, les divers cas possibles relativement aux racines de F, f, f_1, et j'ai trouvé, pour chacun de ces cas, les caractères distinctifs par rapport aux fonctions elliptiques employées dans les formules.

Décomposition de la rotation.

Dans les formules (101), (98) et (97) qui donnent

$$\cos CX \pm i \cos CY, \quad \cos AZ \pm i \cos BZ \quad \text{et} \quad \cos CZ,$$

mettons, au lieu de u, v, a, b, les notations suivantes :

$$(120) \qquad \begin{cases} u = -u_0, \\ v = u_1 + u_0, \\ b = -\frac{1}{2}(v_0 + v_1 + u_0 + u_1), \\ a = -\frac{1}{2}(v_0 - v_1 + u_0 + u_1). \end{cases}$$

On a alors les formes suivantes :

$$(121) \qquad \begin{cases} \cos CX + i \cos CY \\ \quad = \dfrac{2E_1}{\sigma u_0 \sigma v_0 \sigma u_1 \sigma v_1} \prod \sigma\left(\dfrac{u_0 + v_0 \pm u_1 \pm v_1}{2}\right) e^{-\left(\frac{\gamma}{\rho} + \frac{1}{2} D_1\right) u}. \\ \cos CX - i \cos CY \\ \quad = -\dfrac{2}{E_1 \sigma u_0 \sigma v_0 \sigma u_1 \sigma v_1} \prod \sigma\left(\dfrac{u_0 - v_0 \pm u_1 \pm v_1}{2}\right) e^{\left(\frac{\gamma}{\rho} + \frac{1}{2} D_1\right) u}, \end{cases}$$

$$(122) \qquad \begin{cases} \cos AZ + i \cos BZ \\ \quad = \dfrac{2E}{\sigma u_0 \sigma v_0 \sigma u_1 \sigma v_1} \left[\dfrac{\sigma(u+v)}{\sigma u} e^{-u\zeta v}\right]^{\beta} \prod \sigma\left(\dfrac{u_1 + v_1 \pm u_0 \pm v_0}{2}\right) e^{\left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{2} D\right) u}. \\ \cos AZ - i \cos BZ \\ \quad = -\dfrac{2}{E \sigma u_0 \sigma v_0 \sigma u_1 \sigma v_1} \left[\dfrac{\sigma u}{\sigma(u+v)} e^{u\zeta v}\right]^{\beta} \prod \sigma\left(\dfrac{u_1 - v_1 \pm u_0 \pm v_0}{2}\right) e^{\left(\frac{1}{2} D - \frac{\alpha}{\rho}\right) u}; \end{cases}$$

$$(123) \qquad \cos CZ = \frac{2\zeta u_0 + 2\zeta u_1 - \sum \zeta \dfrac{u_0 + u_1 \pm v_0 \pm v_1}{2}}{\sum \zeta \dfrac{u_0 + u_1 \pm (v_0 - v_1)}{2} - \sum \zeta \dfrac{u_0 + u_1 \pm (v_0 + v_1)}{2}}.$$

Ces formules coïncident avec celles que l'on a vues plus haut dans la composition des trièdres. Il n'y a qu'un changement dans les notations. Si l'on met A, B, C et X, Y, Z au lieu de x_1, y_1, z_1 et x_0, y_0, z_0, qu'on pose, en outre,

$$(124)\qquad \begin{cases} C_1 = E\left[\dfrac{\sigma(u+v)}{\sigma u}\, e^{-u\zeta v}\right]^{\beta} e^{\left(\frac{\alpha}{p}-\frac{1}{2}D\right)u}, \\ C_0 = E_1 e^{-\left(\frac{\gamma}{p}+\frac{1}{2}D_1\right)u}, \end{cases}$$

les formules qui donnent $\cos CZ$ et $\cos AZ \pm i \cos BZ$ coïncident de part et d'autre (97), (98) et (21), (15), (16). Celles aussi qui donnent $\cos CX \pm i \cos CY$, déduites des précédentes par le changement des indices, présentent la même coïncidence. Comme, d'autre part, les systèmes d'axes, dans les deux cas, sont congruents, la coïncidence des formules permet de conclure à la coïncidence des figures.

La rotation du corps solide est donc effectivement décomposée en deux autres plus simples M_0, M_1, représentées par des formules analogues à celles des mouvements à la Poinsot, et nous allons examiner cette décomposition.

L'argument u_0 varie proportionnellement au temps, puisqu'il diffère de u par le signe seulement (120). De plus, C_0 est une exponentielle du premier degré en u_0. Donc M_0 est précisément un mouvement à la Poinsot. Toutefois ce mouvement n'est réel que si le discriminant est positif, la variation de u_0 réelle et si v_0 est purement imaginaire à un multiple impair de la demi-période réelle. Ces conditions sont effectivement satisfaites dans un cas, le premier de ceux qui ont été discutés plus haut, celui où $(p'-p)$ est positif. Dans le cas opposé, la décomposition n'est point réelle, et c'est un fait bien digne de remarque, quoique sans intérêt cinématique, que la décomposition d'un mouvement effectif en deux mouvements imaginaires. C'est donc pour le seul cas $p'-p>0$ que nous étudierons la décomposition.

Quand la constante β est nulle, C_1 est aussi une exponentielle du premier degré en $u_1 = u+v$, et la variation de u_1 est proportionnelle au temps. En ce cas, M_1 est aussi un mouvement à la Poinsot. Mais, en général, décomposons C_1 en deux facteurs, dont l'un soit une expo-

nentielle du premier degré. En prenant seulement ce dernier facteur, nous aurons un mouvement à la Poinsot M'_1, dans lequel les axes X_1, Y_1, Z_1, différents de A, B, C, seraient les axes mobiles, liés au plan roulant. Pour amener ces axes en coïncidence avec A, B, C, il suffira de les faire tourner autour de Z_1 d'un angle Ψ, tel que $e^{i\Psi}$ soit égal au facteur négligé dans C_1.

Soient, en effet, a, b, c les axes fixes auxquels on rapporte le mouvement de X_1, Y_1, Z_1 et ψ l'angle que l'intersection des plans ab et X_1Y_1 fait avec X_1; on a

$$(125)\qquad e^{2i\psi} = -\frac{\cos cX_1 + i\cos cY_1}{\cos cX_1 - i\cos cY_1}.$$

Soit C'_1 le facteur pris d'abord dans C_1 pour composer un mouvement à la Poinsot. D'après les formules (1) du début, changer C'_1 en C_1, c'est multiplier $\cos cX_1 + i\cos cY_1$ par $\frac{C_1}{C'_1}$ et $\cos cX_1 - i\cos cY_1$ par le facteur inverse. C'est donc, d'après la dernière formule (125), multiplier $e^{2i\psi}$ par $\left(\frac{C_1}{C'_1}\right)^2$, ou augmenter ψ d'un certain angle Ψ

$$e^{i\Psi} = \frac{C_1}{C'_1};$$

c'est donc faire tourner les axes X_1, Y_1, Z_1 autour de Z_1 d'un angle Ψ dans le sens positif.

Soit $\varkappa$ une arbitraire; prenons

$$(124a)\qquad C'_1 = E e^{\left(\frac{\varkappa+s}{\rho} - \frac{1}{2}D\right)(u_1 - v)};$$

il en résulte (124)

$$e^{i\Psi} = \left[\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u} e^{-u\zeta v}\right]^{\beta} e^{\frac{\varkappa-\varkappa-s}{\rho}u}$$

et, par suite,

$$i\frac{d\Psi}{du} = \beta[\zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v] + \frac{\varkappa-\varkappa-s}{\rho} = \beta z + \frac{\varkappa-\varkappa-s}{\rho}.$$

Exprimant z par $\cos CZ$ (123) et introduisant dt au lieu de du, j'en

conclus

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\beta\rho}{i\theta}\frac{(z_a - z_b)\cos CZ + z_a + z_b}{2} + \frac{\alpha - \varkappa - s}{i\theta}.$$

Je mets maintenant Z_1Z au lieu de CZ, les deux axes Z_1 et C coïncidant, et j'ai, pour la vitesse de rotation considérée,

$$\frac{d\Psi}{dt} = M\cos Z_1Z + N,$$

avec cette expression des deux constantes M, N

$$M = \frac{1}{2}\frac{\beta\rho}{i\theta}(z_a - z_b), \tag{126}$$

$$N = \frac{1}{2}\frac{\beta\rho}{i\theta}(z_a + z_b) + \frac{\alpha - \varkappa - s}{i\theta}. \tag{127}$$

Il est manifeste que les deux mouvements M_0, M_1 *concordants* sont tout à fait arbitraires. Étant donnés, ils déterminent les invariants, les arguments a, b, c et les constantes γ, $\varkappa + s$. Si l'on prenait arbitrairement M et N, les constantes β et α se trouveraient déterminées. Mais d'abord l'arbitraire $\varkappa$ n'influe pas sur le mouvement résultant et, sans restreindre la généralité, on pourra la prendre de manière à faire évanouir N. En second lieu, β ne peut être quelconque; cette constante est déterminée par les autres données. Voici donc la conclusion :

Par rapport à des axes fixes a, b, c (axes de symétrie de deux ellipsoïdes ou hyperboloïdes), deux systèmes d'axes X, Y, Z *et* X_1, Y_1, Z_1 *sont animés de deux mouvements à la Poinsot concordants. Un autre système* A, B, C, *où l'axe* C *coïncide avec* Z_1, *est animé autour de* Z_1, *et par rapport aux axes* X_1, Y_1, *d'une rotation dont la vitesse instantanée est*

$$\frac{d\Psi}{dt} = M\cos Z_1Z.$$

Si la constante M *est convenablement choisie, le mouvement relatif de* A, B, C, *par rapport à* X, Y, Z, *reproduit la rotation d'un solide dans un liquide en l'absence de toute force accélératrice,*

pour un quelconque des cas où, la force vive ayant la forme (75), *la quantité* $(p' - p)$ *est positive.*

Tel est le théorème, analogue à celui de Jacobi sur la rotation d'un corps grave dans le vide, que l'emploi des fonctions elliptiques m'a fait trouver.

Pour mettre ce théorème sous son vrai jour, il faut maintenant dégager entièrement des fonctions elliptiques la solution des deux problèmes suivants :

1° *En supposant donnés les deux mouvements à la Poinsot, trouver les constantes de la rotation résultante ;*

2° *En supposant données, au contraire, ces dernières, trouver les mouvements composants.*

Détermination des constantes au moyen des mouvements composants.

Dans ce premier problème, on suppose donnés deux mouvements à la Poinsot concordants, comme il a été dit au § V. Les quantités suivantes, qui s'y rapportent, sont donc des données, savoir A, A, B. $\tau^2 p v_0$, $\tau^2 p v_1$, $\tau^3 p' v_0$, $\tau^3 p' v_1$; $\tau^2 p u_0$, $\tau^2 p u_1$, $\tau^3 p' u_0$, $\tau^3 p' u_1$; $\tau^2 p v$, $\tau^3 p' v$. Elles sont toutes définies par les éléments des deux mouvements, ainsi que je l'ai expliqué dans le paragraphe rappelé.

C'est au moyen de ces quantités que je vais trouver les expressions des constantes de la rotation résultante, envisagée comme étant celle d'un solide dans un liquide.

En premier lieu, les constantes d'homogénéité ρ et τ se ramènent l'une à l'autre aisément. Nous avons en effet (44) et (105)

$$\frac{du_1}{dt} = \tau = \frac{du}{dt} = \frac{\rho}{\theta}, \qquad \tau = \frac{\rho}{\theta}.$$

Prenons les deux quantités A, B avec leurs expressions elliptiques. D'après les égalités (120), elles fournissent deux des constantes cherchées. On a en effet (52) et (84)

$$A = \frac{\rho}{\theta}[\zeta(a+v) - \zeta a - \zeta(b+v) + \zeta b] = \frac{\rho}{\theta}(z_a - z_b) = \frac{2\sqrt{m}}{\theta},$$

$$B = \frac{\rho}{\theta}[\zeta(a+v) - \zeta a + \zeta(b+v) - \zeta b - 2\zeta v] = \frac{\rho}{\theta}(z_a + z_b) = \frac{1}{2}\frac{h}{\theta}.$$

J'ai déjà employé les notations suivantes (106) :

$$(128)\qquad \tfrac{1}{2}h = \nu_1, \qquad \frac{n}{\gamma_3} = \nu, \qquad \sqrt{m} = \mu, \qquad \sqrt{\tfrac{1}{2}h^2 + m_1} = \mu_1.$$

Les rapports de deux de ces constantes à θ sont maintenant connus par les dernières formules, savoir :

$$(129)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mu}{\theta} = \tfrac{1}{2}\mathrm{A}, \\[2ex] \dfrac{\nu_1}{\theta} = \tfrac{1}{2}\mathrm{B}. \end{cases}$$

Les rapports des deux autres μ_1, ν et de la constante s avec θ se trouvent par le moyen des quantités connues $\tau^2 pc$, $\tau^2 pc_0$, ... Je déduis des égalités (107) et (111),

$$\mu_1^2 + \mu^2 - 2\nu_1^2 = 2\rho^2(2pc_1 + pc),$$

et, par conséquent,

$$\frac{\mu_1^2}{\theta^2} = \tfrac{1}{4}(2\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2) + 2(2\tau^2 pc_1 + \tau^2 pc).$$

Prenant ensuite les combinaisons des égalités (108) et (113),

$$\rho^3(sp'c_1 + 2\nu_1 p'c) = (\tfrac{1}{4}s^2 - \nu_1^2)(\mu^2 - \mu_1^2) = \rho^2(pc_1 - pc)(\mu^2 - \mu_1^2),$$
$$\rho^3(\nu_1 p'c_1 + \tfrac{1}{2}sp'c) = (\nu_1^2 - \tfrac{1}{4}s^2)(\nu + \nu_1)s = \rho^2(pc - pc_1)(\nu + \nu_1)s,$$

j'en conclus

$$(130)\qquad \frac{s}{\theta}\tau^3 p'c_1 + \mathrm{B}\tau^3 p'c = (\tau^2 pc_1 - \tau^2 pc)\left(\frac{\mu^2}{\theta^2} - \frac{\mu_1^2}{\theta^2}\right),$$

$$(131)\qquad \mathrm{B}\tau^3 p'c_1 + \frac{s}{\theta}\tau^3 p'c = 2(\tau^2 pc - \tau^2 pc_1)\left(\frac{\nu}{\theta} + \frac{\nu_1}{\theta}\right)\frac{s}{\theta},$$

égalités dont la première donne $\frac{s}{\theta}$ et la seconde $\frac{\nu}{\theta}$.

Voici donc déterminées déjà cinq constantes $\frac{\mu}{\theta}$, $\frac{\nu}{\theta}$, $\frac{\nu_1}{\theta}$, $\frac{s}{\theta}$ et $\left(\frac{\mu_1}{\theta}\right)^2$.

Considérons maintenant les deux exponentielles C_0 et C'_1 qui achèvent de caractériser les mouvements composants. Elles ont, on le sait, les expressions suivantes (33),

$$C_0 = k_0 e^{\frac{1}{\tau}\left(i\varepsilon\frac{h_0}{n_0} - \tau\zeta v_0\right)u_0}, \qquad C'_1 = k_1 e^{-\frac{1}{\tau}\left(i\varepsilon\frac{h_1}{n_1} + \tau\zeta v_1\right)u_1}.$$

Si l'on y remplace u_0 par $-u$ et u_1 par $u+v$, on voit que les coefficients de u, dans ces exponentielles, sont

$$\frac{1}{\tau}\left(-i\varepsilon\frac{h_0}{n_0} + \tau\zeta v_0\right) \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{\tau}\left(i\varepsilon\frac{h_1}{n_1} + \tau\zeta v_1\right).$$

Le premier d'entre eux, d'après l'expression (124) de C_0 et d'après celle (99) de D_1, doit être

$$-\left(\frac{\gamma}{\rho} + \tfrac{1}{2}D_1\right) = -\frac{1}{\tau}\left\{\frac{\gamma}{\theta} + \frac{\tau}{2}\left[\zeta a + \zeta b + \zeta(a+v) + \zeta(b+v)\right]\right\}.$$

Le second, d'après l'expression (124a) de C'_1 et d'après celle (91) de D_1, doit être

$$\frac{\varkappa + s}{\rho} - \tfrac{1}{2}D = \frac{1}{\tau}\left\{\frac{\varkappa}{\theta} + \frac{\tau}{2}\left[\zeta b - \zeta a + \zeta(b+v) - \zeta(a+v)\right]\right\}.$$

J'ai donc les deux égalités suivantes :

$$(132)\quad \frac{\gamma}{\theta} = \quad i\varepsilon\frac{h_0}{n_0} - \frac{\tau}{2}\left[\zeta a + \zeta b + \zeta(a+v) + \zeta(b+v) + 2\zeta v_0\right],$$

$$(133)\quad \frac{\varkappa}{\theta} = -i\varepsilon\frac{h_1}{n_1} - \frac{\tau}{2}\left[\zeta b - \zeta a + \zeta(b+v) - \zeta(a+v) + 2\zeta v_1\right].$$

Les arguments a, $b+v$, v_0 ont zéro pour somme (120); de même aussi, zéro est la somme des arguments b, $a+v$, v_0. D'après le théorème d'addition des fonctions ζ, on a donc, au moyen des éga-

lités (110),

$$\zeta a + \zeta(b+c) + \zeta c_0 = -\frac{1}{2}\frac{p'(b+c) - p'a}{p(b+c) - pa}$$
$$= -\frac{1}{\rho}\left(\mu - \frac{1}{2}\frac{s\nu}{\mu}\right) = -\frac{1}{\tau}\left(\frac{\mu}{\theta} - \frac{1}{2}\frac{s\nu}{\theta\mu}\right),$$
$$\zeta b + \zeta(a+c) + \zeta c_0 = -\frac{1}{2}\frac{p'(a+c) - p'b}{p(a+c) - pb}$$
$$= \frac{1}{\rho}\left(\mu + \frac{1}{2}\frac{s\nu}{\mu}\right) = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\mu}{\theta} + \frac{1}{2}\frac{s\nu}{\theta\mu}\right).$$

L'égalité (132) devient ainsi

$$\frac{\gamma}{\theta} + \frac{1}{2}\frac{s\nu}{\theta\mu} = i\varepsilon\frac{h_0}{n_0}. \tag{134}$$

En considérant de même b, $-a$, c_1, dont la somme est nulle, et $b+c$, $-(a+c)$, c_1, dont la somme est nulle aussi, j'ai

$$\zeta b - \zeta a + \zeta c_1 = -\frac{1}{2}\frac{p'b + p'a}{pb - pa} = \frac{1}{\rho}\left(\mu + \frac{1}{2}s\right) = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\mu}{\theta} + \frac{1}{2}\frac{s}{\theta}\right),$$
$$\zeta(b+c) - \zeta(a+c) + \zeta c_1 = -\frac{1}{2}\frac{p'(b+c) + p'(a+c)}{p(b+c) - p(a+c)}$$
$$= \frac{1}{\rho}\left(-\mu + \frac{1}{2}s\right) = \frac{1}{\tau}\left(-\frac{\mu}{\theta} + \frac{1}{2}\frac{s}{\theta}\right),$$

et l'égalité (133) devient

$$\frac{\alpha}{\theta} + \frac{1}{2}\frac{s}{\theta} = -i\varepsilon\frac{h_1}{n_1}. \tag{135}$$

Il reste enfin à faire intervenir le troisième mouvement composant, la rotation autour de l'axe Z_1. En premier lieu, l'égalité (126) donne

$$M = \frac{1}{2}\frac{\beta}{i}A.$$

Mais β n'est autre que $-\frac{h}{2s}$ (94) ou $-\frac{B\theta}{s}$ (129). La constante M du troisième mouvement est donc fournie par l'égalité

$$M = \frac{1}{2}AB\frac{i\theta}{s}.$$

Prenant enfin l'égalité (127) et y supposant $N = 0$, j'ai, au moyen de (129),

$$\frac{\alpha - \varkappa - s}{i\theta} = -\tfrac{1}{2} B^2 \frac{i\theta}{s}.$$

Cette dernière, avec (135), donne

$$(136) \qquad \frac{\alpha - \frac{1}{2} s}{i\theta} = -\varepsilon \frac{h_1}{n_1} - \tfrac{1}{2} B^2 \frac{i\theta}{s},$$

à quoi il faut joindre

$$\beta = -B \frac{\theta}{s}.$$

Par les égalités (134) et (136) sont déterminées les constantes purement imaginaires $\frac{\gamma}{\theta}$, $\frac{\alpha}{\theta}$, en fonction des données et de la constante purement imaginaire $\frac{s}{\theta}$. Cette dernière est fournie par l'équation (130). Les cinq constantes trouvées en premier lieu et ces deux dernières $\frac{\gamma}{\theta}$, $\frac{\alpha}{\theta}$ constituent le système de sept constantes relatives à la rotation, qui a été prévu plus haut.

Détermination des mouvements composants au moyen du mouvement composé.

Des égalités (30) appliquées successivement aux deux mouvements à la Poinsot, je conclus en remplaçant $\frac{\mu_0}{n_0}$ et $\frac{\mu_1}{n_1}$ par $-\tau$ et τ, puis τ par $\frac{\rho}{\theta}$,

$$\frac{h_0^2 - a_0^2}{n_0 h_0}(\rho^2 c_\alpha - \rho^2 p c_0) = \frac{\varepsilon}{\theta} \frac{\rho^3 p' c_0}{2i},$$

$$\frac{h_1^2 - a_1^2}{n_1 h_1}(\rho^2 c_\alpha - \rho^2 p c_1) = -\frac{\varepsilon}{\theta} \frac{\rho^3 p' c_1}{2i}.$$

J'écris ces égalités sous la forme suivante :

$$(137) \qquad \frac{h_0^2 - a_0^2}{n_0 h_0}\left[\rho^2(c_\alpha - pc) - \rho^2(pc_0 - pc)\right] = \frac{\varepsilon}{\theta} \frac{\rho^3 p' c_0}{2i},$$

$$(138) \qquad \frac{h_1^2 - a_1^2}{n_1 h_1}\left[\rho^2(c_\alpha - pc) - \rho^2(pc_1 - pc)\right] = -\frac{\varepsilon}{\theta} \frac{\rho^3 p' c_1}{2i},$$

et j'observe d'abord que les trois quantités $\rho^2(e_\alpha - \wp v)$ sont racines de l'équation

$$4(X + \rho^2 \wp v)^3 - \rho^4 g_2 (X + \rho^2 \wp v) - \rho^6 g_3 = 0,$$

c'est-à-dire

$$4X^3 + 12\rho^2 \wp v . X^2 + \rho^4 (12 \wp^2 v - g_2) X + \rho^6 \wp'^2 v = 0.$$

J'ai calculé plus haut (107), (108) et (109) les coefficients de cette équation, en sorte que j'obtiens immédiatement l'équation résolvante

$$\begin{aligned} 4X^3 &+ 2(2\nu_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2 - s^2) X^2 \\ &+ \left[\tfrac{1}{3}(2\nu_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2 - s^2)^2 - (\nu_1^2 - \mu^2)(\nu_1^2 - \mu_1^2) - s^2(\nu + \nu_1)^2\right] X \\ &\qquad + \tfrac{1}{3}\left[\nu_1(\mu_1^2 - \mu^2) - s^2(\nu + \nu_1)\right]^2 = 0. \end{aligned}$$

Remplaçant $\rho^2(\wp v_0 - \wp v)$ et $\rho^3 \wp' v_0$ par leurs expressions (111) et (112) dans l'égalité (137) et posant, pour abréger,

$$\xi_0 = \nu_1^2 - \frac{1}{4} \frac{s^2 \nu^2}{\mu^2},$$

je conclus la détermination du mouvement composant M_0 comme il suit :

Soient X_α, X_β, X_γ les racines de l'équation résolvante; on aura

$$\begin{aligned} (X_\alpha + \xi_0) \frac{h_0^2 - a_0^2}{n_0 h_0} &= (X_\beta + \xi_0) \frac{h_0^2 - b_0^2}{n_0 h_0} = (X_\gamma + \xi_0) \frac{h_0^2 - c_0^2}{n_0 h_0} \\ &= \frac{\varepsilon s}{2i\theta} \left[\nu_1 \left(\mu + \frac{\nu \nu_1}{\mu} \right) + \frac{1}{4} \frac{\nu}{\mu} \left(\mu^2 - \mu_1^2 + s^2 - \frac{s^2 \nu^2}{\mu^2} \right) \right], \end{aligned}$$

à quoi il faut joindre l'égalité (134)

$$\frac{h_0}{n_0} = \varepsilon \left(\frac{\gamma}{i\theta} + \frac{1}{2} \frac{s\nu}{i\theta\mu} \right).$$

Par un calcul tout pareil et en posant

$$\xi_1 = \nu_1^2 - \tfrac{1}{4} s^2,$$

je détermine le mouvement composant M'_1 au moyen des égalités

$$(X_\alpha + \xi_1)\frac{h_1^2 - a_1^2}{n_1 h_1} = (X_\beta + \xi_1)\frac{h_1^2 - b_1^2}{n_1 h_1} = (X_\gamma + \xi_1)\frac{h_1^2 - c_1^2}{n_1 h_1}$$
$$= -\frac{\varepsilon s}{2i\theta}\left[\nu_1(\nu + \nu_1) + \tfrac{1}{4}(\mu^2 - \mu_1^2)\right],$$
$$\frac{h_1}{n_1} = -\varepsilon\frac{\alpha - \frac{1}{2}s + \beta\nu_1}{i\theta}.$$

En outre, la concordance des deux mouvements M_0 et M'_1 comporte la détermination des constantes A, B, $\tau^2 p\varrho$, $\tau^3 p'\varrho$ dont voici les expressions (129), (107) et (108),

$$A = 2\frac{\mu}{\theta}, \qquad B = 2\frac{\nu_1}{\theta},$$
$$\tau^2 p\varrho = \frac{1}{6}\,\frac{2\nu_1^2 + \mu^2 + \mu_1^2 - s^2}{\theta^2}, \qquad \tau^3 p'\varrho = \frac{1}{2}\,\frac{\nu(\mu_1^2 - \mu^2) - s^2(\nu + \nu_1)}{\theta^3}.$$

Enfin la constante du troisième mouvement composant est donnée par l'égalité

$$M = \frac{\beta\mu}{i\theta} = 2\frac{\mu\nu_1 t}{s\theta}.$$

Cas où le corps solide est de révolution.

Le troisième mouvement composant disparaît quand la constante M est nulle. Cette circonstance se produit moyennant l'évanouissement de $\nu_1 = \frac{1}{2}h$, c'est-à-dire de $q - q'$ (80).

Le plus intéressant de ces cas est celui où les deux coefficients q et q' sont nuls. On peut voir dans l'Ouvrage de M. Kirchhoff que cette hypothèse se réalise pour un solide de révolution.

Voici donc un cas très nettement défini, où la rotation du solide dans le liquide se ramène à deux mouvements à la Poinsot seulement, celui où le solide est un corps homogène et de révolution.

Sur quelques formules d'Analyse utiles dans la Théorie des nombres;

PAR LE P. PEPIN, S. J.

1. Je me propose de démontrer l'ensemble des formules générales de Liouville, qui reposent sur la partition numérique exprimée par les équations suivantes

$$n = p + q, \qquad p = a\alpha, \qquad q = b\beta, \qquad n = d\delta,$$

dans lesquelles tous les nombres considérés sont entiers et positifs, pairs ou impairs. Dans la session du 19 avril 1885 de l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei*, je me suis occupé de quelques-unes de ces formules et j'ai montré comment elles découlaient de la démonstration, donnée par Dirichlet, du théorème de Jacobi, relatif à la décomposition du quadruple d'un nombre impair en une somme de quatre carrés impairs. Je renverrai à ce Mémoire le lecteur désireux d'approfondir le sujet qui nous occupe: il y trouvera en même temps de nombreuses applications à la théorie des formes quadratiques quaternaires.

Dans le présent Mémoire, je considérerai successivement les formules qui ne concernent qu'un seul mode de partition, puis celles où l'on compare deux modes différents de partition. Dans un travail sub-

séquent je donnerai de nouvelles applications des formules démontrées.

I. — Formules générales relatives aux équations

$$(1) \qquad n = p + q, \qquad p = a\alpha, \qquad q = b\beta.$$

2. Soit $\varphi(x, y)$ une fonction paire de x et de y, alternée par rapport à ces deux variables, ou du moins une fonction qui, pour toutes les valeurs de x et de y employées dans nos formules, vérifie les conditions

$$(\mathrm{K}) \quad \varphi(x, y) = \varphi(-x, y) = \varphi(x, -y), \qquad \varphi(x, y) = -\varphi(y, x).$$

Au moyen de cette fonction nous formons la somme triple

$$S = \Sigma[\Sigma\Sigma\varphi(a - b, \alpha + \beta)],$$

dont les termes correspondent à tous les systèmes de solutions des équations (1) en nombres entiers et positifs, soumis ou non à quelques restrictions dont nous parlerons plus loin. On forme cette somme en considérant successivement toutes les partitions du nombre donné n en deux parties entières et positives p, q. Pour chaque partition, on décompose les deux nombres p, q de toutes les manières possibles en deux facteurs $p = a\alpha$, $q = b\beta$; on combine chaque couple a, α avec chaque couple b, β et à chacun des systèmes a, α, b, β ainsi obtenus on fait correspondre un terme $\varphi(a - b, \alpha + \beta)$; la somme de tous ces termes, pour une même solution de l'équation $n = p + q$, forme la somme partielle, indiquée par les deux Σ renfermés entre crochets. L'autre Σ indique la somme de toutes ces sommes partielles, relatives aux diverses solutions de l'équation $n = p + q$.

Pour la démonstration que nous avons à faire, il est plus commode de remplacer le système des équations (1) par l'équation unique

$$(2) \qquad n = a\alpha + b\beta,$$

et de remplacer la triple somme par une somme unique, dont les éléments correspondent aux diverses solutions de l'équation (2).

Nous partagerons la somme S en deux parties, l'une, S_0, relative à l'hypothèse $a = b$, et l'autre, S_1, dont les éléments correspondent aux solutions dans lesquelles a et b sont inégaux. Les termes de cette dernière somme peuvent se grouper deux à deux au moyen des formules

$$(A) \qquad a_1 = b, \qquad b_1 = a, \qquad \alpha_1 = \beta, \qquad \beta_1 = \alpha.$$

Les deux termes de chaque groupe sont égaux; car, en vertu des formules (A) et (K), on a

$$a_1 - b_1 = -(a - b), \qquad \alpha_1 + \beta_1 = \alpha + \beta,$$
$$\varphi(a_1 - b_1, \alpha_1 + \beta_1) = \varphi(-a + b, \alpha + \beta) = \varphi(a - b, \alpha + \beta).$$

Nous pouvons donc remplacer leur somme par le double de celui des deux termes qui correspond à une valeur positive de la différence $(a - b)$. La somme S est alors exprimée par la formule

$$S = S_0 + 2\Sigma_1 \varphi(a - b, \alpha + \beta),$$

dans laquelle Σ_1 désigne une somme dont les termes correspondent aux divers systèmes de valeurs entières et positives de a, b, α, β propres à vérifier les conditions

$$(3) \qquad n = a\alpha + b\beta, \qquad a > b.$$

5. Nous nous occuperons d'abord de la somme Σ_1 dont nous grouperons les termes deux à deux, en faisant correspondre à chaque solutions a, b, α, β, vérifiant la condition $a > b$, une autre solution a_1, b_1, α_1, β_1, au moyen des deux formules

$$(B) \qquad a_1 - b_1 = \alpha + \beta, \qquad \alpha_1 + \beta_1 = a - b,$$

autant du moins que cette correspondance sera compatible avec les conditions imposées aux nombres qui figurent dans l'équation (2).

Pour cela, nous écrirons de la manière suivante les deux solutions

que nous voulons associer :

$$(4) \qquad n = (a - b)\alpha + (\alpha + \beta)b, \qquad n = (a_1 - b_1)\alpha_1 + (\alpha_1 + \beta_1)b_1.$$

En faisant la substitution (B) dans la dernière formule, on trouve

$$(4') \qquad n = (a - b)b_1 + (\alpha + \beta)\alpha_1.$$

La comparaison des deux formules (4) et (4') montre que la dernière se trouve vérifiée lorsqu'on joint aux relations (B) les formules suivantes

$$(C) \qquad b_1 = \alpha + \theta(\alpha + \beta), \qquad \alpha_1 = b - \theta(a - b),$$

dans lesquelles θ désigne un nombre entier quelconque. On a donc

I.

$$\alpha_1 = b - \theta(\alpha - b), \qquad \beta_1 = (\theta + 1)(a - b) - b.$$
$$a_1 = \alpha + (\theta + 1)(\alpha + \beta), \qquad b_1 = \alpha + \theta(\alpha + \beta).$$

Les deux conditions $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$ déterminent le nombre θ au moyen des deux inégalités

$$(5) \qquad \theta < \frac{b}{a - b} < \theta + 1,$$

pourvu toutefois que le quotient $b : (a - b)$ ne soit pas un nombre entier; car alors l'une des deux inégalités se changerait en égalité et l'un des deux nombres α_1, β_1 serait nul, contrairement à l'hypothèse. Tant que le quotient $b : (a - b)$ est fractionnaire, on vérifie les deux inégalités (5) en prenant pour valeur de θ la partie entière de ce quotient. La différence $a - b$ étant positive, le nombre θ est nul ou positif, de sorte que les formules I déterminent des valeurs positives pour les quatre nombres a_1, b_1, α_1, β_1, et les deux solutions associées vérifient en même temps la condition $a - b > 0$, $a_1 - b_1 > 0$.

4. Puisque le nombre θ a une valeur unique, déterminée par les inégalités (5), les formules I ne font correspondre qu'une seule solu-

tion a_1, b_1, α_1, β_1 à chacune des solutions a, b, α, β, dans lesquelles le quotient $b:(a-b)$ est fractionnaire et positif. De plus, la même solution a_1, b_1, α_1, β_1 ne peut pas correspondre à deux systèmes différents de valeurs des nombres a, b, α, β; car, si l'on avait, conjointement avec les formules I, les formules suivantes

$$\alpha_1 = b' - \theta'(a' - b'), \qquad \beta_1 = (\theta'+1)(a'-b') - b',$$
$$a_1 = \alpha' + (\theta'+1)(\alpha+\beta), \qquad b_1 = \alpha' + \theta'(\alpha'+\beta'),$$

on en déduirait respectivement

$$\alpha = b_1 - \theta(a_1 - b_1), \qquad \beta = (\theta+1)(a_1 - b_1) - b_1,$$
$$b = \alpha_1 + \theta(\alpha_1 + \beta_1), \qquad a = \alpha_1 + (\theta+1)(\alpha_1+\beta_1),$$
$$\alpha' = b_1 - \theta'(a_1 - b_1), \qquad \beta' = (\theta'+1)(a_1 - b_1) - b_1,$$
$$b' = \alpha_1 + \theta'(\alpha_1' + \beta_1), \qquad a' = \alpha_1 + (\theta'+1)(\alpha_1+\beta_1).$$

Les deux conditions $\alpha > 0$, $\beta > 0$ déterminent θ par les deux inégalités

$$\theta < \frac{b_1}{a_1 - b_1} < \theta + 1;$$

de même, les conditions $\alpha' > 0$, $\beta' > 0$ exigent que l'on ait

$$\theta' < \frac{b_1}{a_1 - b_1} < \theta' + 1.$$

On a donc nécessairement $\theta' = \theta$ et par conséquent $a' = a$, $b' = b$, $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$. Il reste à examiner si les solutions ainsi groupées satisfont à toutes les conditions imposées. Cela est évident d'abord lorsque les nombres a, b, α, β ne sont soumis qu'à la seule condition d'être entiers et positifs, car la différence $a - b$ étant positive et le nombre θ étant positif ou nul, les nombres a_1, b_1, α_1, β_1 déterminés par les formules I sont nécessairement positifs et satisfont à la condition $a_1 - b_1 > 0$. Cela est vrai encore lorsque les quatre nombres a, b, α, β sont tous impairs, car alors les nombres a_1, b_1, α_1, β_1 sont aussi impairs. Dans ces deux cas toutes les solutions de l'équation (3) dans lesquelles le quotient $b:(a-b)$ n'est pas un nombre entier sont

groupées deux à deux par les formules I, de telle sorte que la même solution ne figure jamais dans deux groupes différents. Mais cela n'aurait plus lieu si les deux nombres a, b devaient être tous deux impairs, tandis que l'un des deux nombres α, β serait pair; dans ce cas la simplification de la somme triple S ne peut plus s'effectuer au moyen des formules I.

Or les deux termes de la somme Σ_1 qui correspondent aux deux solutions d'un même groupe forment une somme nulle; car, en vertu des formules I, on a

$$\alpha_1 + \beta_1 = a - b, \qquad a_1 - b_1 = \alpha + \beta,$$
$$\varphi(a_1 - b_1, \alpha_1 + \beta_1) = \varphi(\alpha + \beta, a - b) = -\varphi(a - b, \alpha + \beta).$$

Par conséquent, les seuls termes qui restent dans la somme Σ_1 sont ceux qui correspondent aux solutions de l'équation (3) dans lesquelles le quotient $b:(a-b)$ est un nombre entier. L'évaluation de Σ_1 dépend donc des conditions auxquelles sont assujettis les nombres a, b, α, β.

1° $\qquad n = 2^\lambda m \qquad (a, \quad b, \quad \alpha, \quad \beta$ impairs).

5. Supposons d'abord n pair et posons $n = 2^\lambda m$, en désignant par m un nombre impair. Les deux nombres a et b étant impairs, le quotient $b:(a-b)$ ne peut pas se réduire à un nombre entier; par conséquent la somme Σ_1 s'évanouit. On a dans ce cas

$$S = S_0 = \Sigma\varphi(0, \alpha + \beta),$$

la somme désignée par Σ s'étendant à toutes les solutions de l'équation (2) dans lesquelles a et b sont égaux. Or la valeur commune des deux nombres impairs a et b doit nécessairement diviser le nombre m; c'est pourquoi nous posons

$$a = b = d, \qquad m = d\delta$$

et l'équation (2) se trouve remplacée par la suivante

$$(2') \qquad 2^\lambda \delta = \alpha + \beta,$$

dans laquelle on doit égaler δ successivement à tous les diviseurs du nombre m. La somme des termes qui correspondent à une même valeur de δ est égale à $\varphi(0, 2^\lambda\delta)$ multiplié par le nombre des solutions de l'équation (2'), relativement à cette valeur de δ. Lorsque les nombres α, β doivent être impairs, le nombre de ces solutions est égal à $2^{\lambda-1}\delta$; car on peut égaler α à tous les nombres impairs

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad \ldots, \quad 2^\lambda\delta - 1,$$

dont le nombre est $2^{\lambda-1}\delta$, et, pour chacune de ces valeurs, on obtient β par la formule

$$\beta = 2^\lambda\delta - \alpha.$$

Dans ce cas, on a

$$S = S_0 = 2^{\lambda-1}\Sigma\delta\varphi(0, 2^\lambda\delta),$$

la somme indiquée par Σ s'étendant à toutes les solutions de l'équation $m = d\delta$. En remplaçant S par la triple somme représentée par cette lettre, on obtient la formule suivante

$$(6) \qquad \Sigma[\Sigma\Sigma\varphi(a-b, \alpha+\beta)] = 2^{\lambda-1}\Sigma\delta\varphi(0, 2^\lambda\delta),$$

dans laquelle les trois sommations du premier membre se rapportent aux diverses solutions des trois équations

$$2^\lambda m = m' + m'', \qquad m' = a\alpha, \qquad m'' = b\beta$$

en nombres entiers, positifs et impairs, m', m'', a, b, α, β, tandis que la somme indiquée dans le second membre correspond aux diverses décompositions du nombre m en deux facteurs, $d\delta = m$.

2° λ, a, b, α, β entiers et positifs quelconques.

6. Lorsque les nombres a, b, α, β peuvent être pairs ou impairs, le quotient $b:(a-b)$ peut être un nombre entier. Soit k la valeur de ce quotient. Les solutions de l'équation (3) auxquelles correspondent les termes qui restent dans Σ_1 sont déterminées par les formules suivantes :

$$n = a\alpha + b\beta, \qquad b = k(a-b), \qquad a > b.$$

Nous ferons $a - b = \delta$ et par conséquent

$$b = k\delta, \qquad a = (k+1)\delta, \qquad n = \delta[k(\alpha+\beta)+\alpha].$$

Le nombre δ étant diviseur de n, posons

$$n = d\delta.$$

Les nombres α, β seront déterminés par la formule

$$(7) \qquad d = k(\alpha+\beta)+\alpha.$$

Comme les nombres k, α, β sont entiers et positifs, la somme $\alpha+\beta$ est au moins égale à 2, et d au moins égal à 3. Ainsi, pour évaluer Σ_1, on prendra successivement pour d tous les diviseurs de n supérieurs à 2; pour chaque valeur de d, on égalera $\alpha+\beta$ à chacun des nombres

$$2, \quad 3, \quad \ldots, \quad d-1,$$

en exceptant celles de ces valeurs qui diviseraient exactement d et auxquelles correspondrait une valeur nulle de α; on divisera d par chacune de ces valeurs et l'on prendra le reste de cette division comme valeur de α. La somme des termes de Σ_1 qui correspondent à un même couple de valeurs de d et de δ vérifiant les conditions $d\delta = n$ et $d > 2$ est

$$\varphi(\delta, 2)+\varphi(\delta, 3)+\varphi(\delta, 4)+\ldots+\varphi(\delta, d-1),$$

avec cette condition de réduire à zéro le terme $\varphi(\delta, \mu)$ lorsque μ est diviseur de d. On a donc

$$\Sigma_1 = \Sigma'[\varphi(\delta, 2)+\varphi(\delta, 3)+\varphi(\delta, 4)+\ldots+\varphi(\delta, d-1)]$$

en désignant par Σ' une somme qui s'étend à toutes les décompositions du nombre n en deux facteurs d, δ, mais avec cette restriction de faire évanouir le terme $\varphi(\delta, \mu)$ lorsque μ est diviseur de d. Les décompositions $d = 1$, $\delta = n$; $d = 2$, $\delta = \frac{n}{2}$ se trouvent exclues, parce que dans la somme partielle, comprise entre parenthèses, le dernier terme

$\varphi(\delta, d-1)$ ne peut jamais présenter une valeur de $d-1$ inférieure à 2, la seconde variable devant croître depuis le premier terme $\varphi(\delta, 2)$ jusqu'au dernier.

7. Il nous reste à évaluer dans la même hypothèse la somme S_0 des termes qui correspondent aux solutions de l'équation (2) dans lesquelles les deux nombres a et b sont égaux. La valeur commune de ces deux nombres étant un diviseur de n, nous posons

$$a = b = \delta, \qquad n = d\delta,$$

et l'équation (2) se réduit à

$$(2') \qquad d = \alpha + \beta.$$

Les termes correspondants de la somme S sont tous égaux à $\varphi(0, d)$, et leur somme est égale au produit de $\varphi(0, d)$ multiplié par le nombre des solutions de l'équation (2'). Ce nombre est égal à $d-1$, car on peut prendre pour α les valeurs

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad d-1,$$

et, pour chacune de ces valeurs, on a

$$\beta = d - \alpha.$$

La somme S_0 est donc égale à la somme de tous les produits

$$(d-1)\varphi(0, d)$$

qui correspondent à tous les diviseurs de n désignés indéfiniment par d. En joignant ce résultat à celui du numéro précédent, on obtient la formule

$$(g) \quad \left\{ \begin{aligned} S = \Sigma[\Sigma\Sigma\varphi(a-b, \alpha+\beta)] &= \Sigma(d-1)\varphi(0, d) \\ &+ 2\Sigma'[\varphi(\delta, 2) + \varphi(\delta, 3) + \varphi(\delta, 4) + \ldots + \varphi(\delta, d-1)]. \end{aligned} \right.$$

8. On vérifie les conditions K (n° **2**) imposées à la fonction

$\varphi(x, y)$, en prenant

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - f(y, x),$$

pourvu que la fonction $f(x, y)$ soit une fonction paire des deux variables x, y, c'est-à-dire pourvu que l'on ait

$$f(-x, y) = f(x, y) = f(x, -y)$$

pour toutes les valeurs de x et de y qui figurent dans nos formules.

En substituant l'expression précédente de $\varphi(x, y)$ dans la formule (8), on obtient la suivante :

$$(f)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b, \alpha+\beta) - f(\alpha+\beta, a-b)]\} \\ &\quad = \Sigma(d-1)[f(0, d) - f(d, 0)] \\ &\qquad + 2\Sigma'[f(\delta, 2) + f(\delta, 3) + \ldots + f(\delta, d-1)] \\ &\qquad - 2\Sigma'[f(2, \delta) + f(3, \delta) + \ldots + f(d-1, \delta)]. \end{aligned}\right.$$

Les trois sommes indiquées dans les premiers membres des formules (f) et (g) se rapportent aux solutions des trois équations

$$(1)\qquad n = p + q, \qquad p = a\alpha, \qquad q = b\beta$$

en nombres entiers et positifs, comme nous l'avons expliqué plus haut (n° **2**). La première somme du second membre se rapporte aux diverses décompositions du nombre n en deux facteurs d, δ; enfin les sommes indiquées par Σ' se rapportent aux mêmes décompositions du nombre n, mais avec cette restriction de réduire à zéro les termes $\varphi(\delta, \mu)$, $f(\delta, \mu)$, $f(\mu, \delta)$ toutes les fois que μ est diviseur de d.

Les formules (f) et (g) ne diffèrent que par les notations des formules désignées par les mêmes lettres dans le cinquième article de Liouville (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. III, p. 284). Comme l'équation

$$n = a\alpha + b\beta$$

est symétrique par rapport aux lettres grecques et aux lettres latines, les deux sommes

$$\Sigma f(\alpha+\beta, a-b) \quad \text{et} \quad \Sigma f(a+b, \alpha-\beta)$$

sont égales, de sorte que le premier membre de la formule (f) peut s'écrire de la manière suivante :

$$(f') \qquad \Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b, \alpha+\beta)-f(a+b, \alpha-\beta)]\}.$$

9. Lorsqu'on réduit la fonction $f(x, y)$ à une fonction de la seule variable x, vérifiant la condition $f(-x)=f(x)$, l'expression (f') devient

$$\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b)-f(a+b)]\}.$$

Le premier terme du second membre de la formule (f) devient

$$\Sigma(d-1)[f(0)-f(d)]=f(0)[\zeta_1(n)-\zeta(n)]-\Sigma(d-1)f(d),$$

pourvu que l'on désigne par $\zeta_1(n)$ la somme des diviseurs de n et par $\zeta(n)$ le nombre de ces diviseurs. Dans la somme Σ' qui forme le deuxième terme du second membre de la même formule, tous les termes qui correspondent à un même diviseur δ de n sont égaux à $f(\delta)$; leur nombre est celui des termes $2, 3, 4, \ldots, d-1$ qui ne sont pas diviseurs de d, c'est-à-dire $d-\zeta(d)$. On a donc

$$(\mathrm{H}) \quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b)-f(a+b)]\} \\ &\quad=[\zeta_1(n)-\zeta(n)]f(0)+\Sigma[2d-2\zeta(d)-\delta+1]f(\delta) \\ &\qquad-2\Sigma'[f(2)+f(3)+\ldots+f(d-1)]. \end{aligned}\right.$$

Les sommes qui figurent dans le second membre se rapportent à toutes les décompositions du nombre n en deux facteurs d, δ; mais dans la somme Σ' on doit supprimer le terme $f(\mu)$ de la somme partielle

$$f(2)+f(3)+f(4)+\ldots+f(d-1),$$

qui correspond à l'une de ces décompositions, chaque fois que μ est diviseur de d. Ainsi, pour $d=4$, cette somme se réduit à $f(3)$; pour $d=6$, elle se réduit à $f(4)+f(5)$, et ainsi de suite. La formule (H) a été donnée par Liouville dans son quatrième article (*loc. cit.*, p. 247). Liouville a aussi indiqué dans son cinquième article comment la formule (H) se déduit de la formule (f) (*ibid.*, p. 286).

10. La formule (6), que nous avons obtenue plus haut (n° 5), donne les formules des premiers articles de Liouville, lorsqu'on prend

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - f(y, x),$$

en désignant par f une fonction paire des deux variables x, y, c'est-à-dire une fonction qui vérifie les conditions

$$f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y)$$

pour toutes les valeurs des variables x, y employées dans nos formules. On obtient immédiatement la formule

$$(b) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma \{ \Sigma\Sigma [f(a-b, \alpha+\beta) - f(\alpha+\beta, a-b) \\ &\quad = 2^{\lambda-1} \Sigma d [f(0, 2^\lambda d) - f(2^\lambda d, 0)], \end{aligned} \right.$$

dans laquelle la somme triple du premier membre se rapporte aux trois équations

$$(1') \qquad 2^\lambda m = m' + m'', \qquad m' = a\alpha, \qquad m'' = b\beta,$$

où les nombres $m, m', m'', a, b, \alpha, \beta$ sont entiers, positifs et impairs. Ces équations étant les mêmes lorsqu'on échange entre elles les lettres latines et les lettres grecques correspondantes, on a

$$\Sigma . \Sigma\Sigma f(\alpha+\beta, a-b) = \Sigma . \Sigma\Sigma f(a+b, \alpha-\beta).$$

En faisant cette substitution dans l'équation (b), on trouve

$$(c) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma \{ \Sigma\Sigma [f(a-b, \alpha+\beta) - f(a+b, \alpha-\beta)] \} \\ &\quad = 2^{\lambda-1} \Sigma d [f(0, 2^\lambda d) - f(2^\lambda d, 0)]. \end{aligned} \right.$$

Lorsqu'on réduit la fonction $f(x, y)$ à une fonction de la seule variable x vérifiant la condition $f(x) = f(-x)$, cette formule devient

$$(a) \quad \Sigma \{ \Sigma\Sigma [f(a-b) - f(a+b)] \} = 2^{\lambda-1} \Sigma d [f(0) - f(2^\lambda d)].$$

Enfin l'hypothèse $\lambda = 1$ réduit les formules (a), (b), (c) aux trois

suivantes

$$(\mathrm{A})\qquad \Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b)-f(a+b)]\}=\Sigma d[f(0)-f(2d)],$$

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{aligned}&\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b,\alpha+\beta)-f(\alpha+\beta,a-b)]\}\\&\quad=\Sigma d[f(0,2d)-f(2d,0)],\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{C})\qquad \left\{\begin{aligned}&\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b,\alpha+\beta)-f(a+b,\alpha-\beta)]\}\\&\quad=\Sigma[f(0,2d)-f(2d,0)];\end{aligned}\right.$$

en même temps, les équations (1') auxquelles se rapportent les trois sommations indiquées dans les premiers membres, deviennent

$$2m=m'+m'',\qquad m'=a\alpha,\qquad m''=b\beta.$$

Dans toutes ces formules, la somme indiquée par Σ dans les seconds membres se rapporte aux diverses décompositions du nombre impair donné m en deux facteurs. Ces formules coïncident, aux notations près, avec les formules générales désignées par les mêmes lettres dans les deux premiers articles de Liouville (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. III, p. 143 et 193).

II. — Formules relatives a la partition

$$m=\mathrm{A}a+\mathrm{B}b,$$

ou les nombres m, a, b sont impairs.

11. Étant donné un nombre m impair, on le partage en deux parties positives p, q et l'on décompose chacun des deux nombres p, q en deux facteurs, dont l'un doit être impair; en un mot, nous posons les trois équations

$$(1)\qquad m=p+q,\qquad p=\mathrm{A}a,\qquad q=\mathrm{B}b,$$

en assujettissant les deux nombres a et b à être impairs. Le nombre donné m étant impair, l'un des deux nombres A, B sera pair, et l'autre, impair. A chaque système de solutions des équations (1) nous faisons

correspondre deux termes

$$f(A - B, a + b), \qquad f(A + B, a - b),$$

où l'on désigne par $f(x, y)$ une fonction paire des deux variables x, y, ou encore une fonction qui vérifie les conditions

$$f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y)$$

pour toutes les valeurs de x et de y employées dans nos formules.

Au moyen de tous les termes semblables qui correspondent aux divers systèmes de solutions des équations (1), nous formons la somme triple

$$S = \Sigma\{\Sigma\Sigma[f(A - B, a + b) - f(A + B, a - b)]\},$$

où nous indiquons par les deux Σ entre crochets les deux sommations relatives aux deux équations $p = Aa$, $q = Bb$; on obtient ainsi une somme partielle qui correspond à une solution unique de l'équation $m = p + q$; puis, en ajoutant toutes les sommes partielles, relatives aux diverses solutions de l'équation $m = p + q$, on trouve la somme S; c'est ce qu'indique le premier Σ du second membre.

Nous allons démontrer que, par la suppression de termes qui se détruisent deux à deux, on peut exprimer la somme triple S au moyen des deux sommes simples

$$\Sigma d f(d, 0),$$

$$\Sigma[f(d, 0) + 2f(d, 2) + 2f(d, 4) + \ldots + 2f(d, \delta - 1)],$$

qui correspondent l'une et l'autre aux diverses décompositions du nombre m en deux facteurs d, δ.

12. Pour rendre la démonstration plus facile, nous remplacerons la somme triple, relative aux trois équations (1), par une somme unique correspondant aux solutions de l'équation

$$(2) \qquad m = Aa + Bb,$$

en nombres entiers et positifs A, B, a, b, dont les deux derniers,

a et b, doivent être impairs. Nous considérerons séparément les deux sommes

$$\Sigma f(A - B, a + b), \qquad \Sigma f(A' + B', a' - b').$$

en faisant correspondre la dernière à l'équation

$$(2') \qquad m = A'a' + B'b',$$

qui ne diffère de l'équation (2) que par la notation. Les termes

$$f(A - B, a + b), \qquad f(A' + B', a' - b')$$

des deux sommes sont égaux lorsqu'on a

$$A' + B' = \pm(A - B), \qquad a + b = \pm(a' - b').$$

Pour éviter le double signe, nous remplacerons les deux sommes considérées par deux autres sommes, vérifiant respectivement les conditions

$$A - B > 0, \qquad a' - b' > 0.$$

D'abord, la différence $A - B$ ne s'évanouit jamais, puisqu'elle est un nombre impair; par conséquent les solutions de l'équation (2) peuvent se grouper deux à deux au moyen des formules

$$A_1 = B, \qquad B_1 = A, \qquad a_1 = b, \qquad b_1 = a,$$

et la somme des deux termes égaux

$$f(A - B, a + b) + f(A_1 - B_1, a_1 + b_1)$$

peut être remplacée par le double de celui des deux termes qui vérifie la condition $A - B > 0$. On a donc

$$\Sigma f(A - B, a + b) = 2\Sigma_1 f(A - B, a + b).$$

en désignant par Σ_1 une somme dont les termes satisfont à la condition $A - B > 0$. On peut de même grouper deux à deux les termes de la

somme $\Sigma f(A' + b', a' - b')$ dans lesquels la différence $a' - b'$ ne s'évanouit pas; mais il reste à ajouter les termes dans lesquels $a' = b'$. En vertu de l'équation (2'), la valeur commune de a' et de b' est un diviseur δ de m; posant donc $m = d\delta$, on a

$$d = A' + B', \qquad f(A' + B', a' - b') = f(d, 0).$$

Les termes de ce genre, qui correspondent à une même décomposition du nombre m en deux facteurs d, δ, sont égaux à $f(d, 0)$, et leur nombre est celui des solutions de l'équation $d = A' + B'$, c'est-à-dire $d - 1$, puisque l'on doit donner à A' les valeurs $1, 2, 3, \ldots, d - 1$. La somme des termes égaux à $f(d, 0)$ est donc égale au produit

$$(d - 1) f(d, 0),$$

et la somme de tous les termes

$$f(A' + B', a' - b'),$$

dans lesquels on a

$$a' = b',$$

est égale à

$$\Sigma(d - 1) f(d, 0),$$

la somme Σ s'étendant à toutes les solutions de l'équation $m = d\delta$. A considérer l'équation $d = A' + B'$, on voit que d doit être > 1; par conséquent, on devrait exclure la décomposition $d = 1$, $\delta = m$. Mais, comme le terme correspondant $(d - 1) f(d, 0)$ s'évanouit, rien n'empêche d'ajouter ce terme, comme nous le faisons. On a donc

$$\Sigma f(A' + B', a' - b') = \Sigma(d - 1) f(d, 0) + 2\Sigma_2 f(A' + B', a' - b'),$$

en désignant par Σ_2 une somme restreinte par la condition $a' - b' > 0$.

15. La somme S est donc exprimée par la formule

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} S = &+ 2\Sigma_1 f(A - B, a + b) \\ &- 2\Sigma_2 f(A' + B', a' - b') - \Sigma(d - 1) f(d, 0). \end{aligned} \right.$$

Or tous les termes de Σ_2 sont détruits un à un, par des termes égaux de Σ_1, et il ne reste de cette dernière somme que les termes dans

lesquels le quotient $B : (A - B)$ est un nombre entier. D'abord les deux termes

$$f(A' + B', a' - b'), \qquad f(A - B, a + b)$$

sont égaux lorsqu'on a

$$(A) \qquad A - B = A' + B', \qquad a' - b' = a + b.$$

Or les équations (2), (2'), auxquelles se rapportent respectivement les deux sommes Σ_1, Σ_2, peuvent s'écrire de la manière suivante

$$(2) \qquad m = (A - B)a + (a + b)B,$$

$$(2') \qquad m = (A' + B')b' + (a' - b')A',$$

et la dernière, par la substitution (A), devient

$$m = (A - B)b' + (a + b)A'.$$

En comparant cette équation avec l'équation (2), on voit que l'équation (2') sera une conséquence de l'équation (2), si l'on joint aux formules (A) les deux formules suivantes

$$(B) \qquad b' = a + \theta(a + b), \qquad A' = B - \theta(A - B),$$

en désignant par θ un nombre entier soumis à la condition que les nombres A', B', a', b' soient positifs. Or, suivant que l'on résout les formules (A) et (B) par rapport aux lettres accentuées ou par rapport aux lettres dépourvues d'accent, on obtient les deux systèmes équivalents

I.

$$A' = B - \theta(A - B). \qquad B' = (\theta + 1)(A - B) - B,$$

$$a' = a + (\theta + 1)(a + b), \qquad b' = a + \theta(a + b);$$

II.

$$a = b' - \theta(a' - b'), \qquad b = (\theta + 1)(a' - b') - b',$$

$$A = A' + (\theta + 1)(A' + B'), \qquad B = A' + \theta(A' + B').$$

Les conditions $a > 0$, $b > 0$ exigent que le nombre θ vérifie les deux inégalités

$$(4) \qquad \theta < \frac{b'}{a' - b'} < \theta + 1;$$

de même, pour que les deux nombres A', B' soient positifs, il faut que l'on ait

$$(5) \qquad \theta < \frac{B}{A - B} < \theta + 1.$$

Comme la différence $a' - b'$ est paire, tandis que b' est impair, on vérifie les inégalités (4) en prenant pour θ la partie entière du quotient $b' : (a' - b')$; cette valeur étant nulle ou positive, les nombres correspondants a, b, A, B sont positifs et de plus les deux premiers a, b sont impairs. Par conséquent, à un terme quelconque de Σ_2 on fait correspondre par les formules H un terme de Σ_1 et un seul; et, comme la valeur correspondante de θ doit vérifier non seulement les inégalités (4), mais encore les inégalités (5), le quotient $B : (A - B)$ n'est pas un nombre entier. Enfin le même terme de Σ_1 ne correspond dans les formules H qu'à un seul terme de Σ_2; car, en résolvant les équations H par rapport aux nombres A', B', a', b', on obtient les équations I, et, comme les nombres A', B' sont positifs, les nombres A, B, θ doivent vérifier les inégalités (4), qui déterminent pour θ une valeur unique, égale à la partie entière du quotient $B : (A - B)$; par conséquent les formules H ne peuvent faire correspondre un système A, B, a, b qu'à un seul système A', B', a', b'.

14. Il résulte de là que, dans la formule (3), tous les termes de Σ_2 sont détruits par des termes égaux de Σ_1 qui correspondent à des solutions de l'équation (2) dans lesquelles le quotient $B : (A - B)$ est fractionnaire. Il reste donc dans la somme Σ_1 tous les termes qui correspondent à des solutions de l'équation (2) où le quotient $B : (A - B)$ est entier. J'ajoute que ces termes sont les seuls termes de Σ_1 qui, dans la formule (3), ne soient pas détruits par des termes égaux de Σ_2, qui leur correspondent un à un, en vertu des formules (A) et (B); car, si l'on considère une solution de l'équation (2), dans

laquelle le quotient $B:(A-B)$ ne soit pas un nombre entier et qui vérifie la condition $A-B>0$ supposée dans la somme Σ_1, on déduira des formules (5) une valeur unique de θ, égale à la partie entière du quotient $B:(A-B)$. Cette valeur de θ étant nulle ou positive, les nombres A', B', a', b' déterminés par les formules I et les inégalités (5), sont positifs; de plus les deux nombres a', b' sont impairs et vérifient la condition $a'-b'>0$; enfin ils forment une solution de l'équation (2), puisque l'on suppose que les nombres A, B, a, b satisfont à l'équation (2). Par conséquent, ces derniers nombres correspondent, en vertu des formules (A) et (B), à un terme de la somme Σ_2, ainsi que nous l'avons énoncé.

Les termes de la différence $\Sigma_1-\Sigma_2$ qui, dans la formule (3), ne se détruisent pas deux à deux, en vertu des formules (A) et (B), sont donc les termes de Σ_1 qui correspondent aux solutions de l'équation (2), dans lesquelles le quotient $B:(A-B)$ est un nombre entier.

15. Désignons par k la valeur de ce quotient. Nous aurons

$$B=k(A-B),\qquad B=kd,\qquad A=(k+1)d,$$

et l'équation (2) deviendra

$$m=[k(a+b)+a]d.$$

Le nombre $A-B=d$ sera donc un diviseur du nombre m; en désignant par δ le facteur conjugué, on pourra remplacer la dernière équation par le système suivant :

$$(6)\qquad m=d\delta,\quad \delta=k(a+b)+a.$$

Les trois nombres a, b, k étant positifs, le nombre δ ne peut pas être inférieur à 3, ce qui exclut la décomposition $d=m$, $\delta=1$. Mais, pour toute autre décomposition du nombre m en deux facteurs d, δ, on a dans la somme Σ_1 un groupe de termes $f(d, a+b)$, qui correspondent aux divers systèmes de valeurs des nombres a, b propres à vérifier la deuxième des équations (6). Pour les trouver, on prendra

comme valeur de la somme $a+b$ tous les nombres pairs, inférieurs à δ,

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad \ldots, \quad \delta-1;$$

on divisera δ successivement par chacune de ces valeurs, ce qui donnera un quotient entier et positif k, et un reste impair et positif que l'on prendra comme valeur de a. On aura ainsi un groupe de termes

$$f(d, 2)+f(d, 4)+\ldots+f(d, \delta-1),$$

et l'on obtiendra la différence $\Sigma_1-\Sigma_2$ en faisant la somme de tous les groupes semblables, relativement aux diverses solutions de l'équation $m=d\delta$ autres que $d=m$, $\delta=1$. On a donc

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} S &= 2\Sigma[f(d, 2)+f(d, 4)+\ldots+f(d, \delta-1)]-\Sigma(d-1)f(d, 0)\\ &= \Sigma[f(d, 0)+2f(d, 2)+2f(d, 4)+\ldots+2f(d, \delta-1)-df(d, 0)]. \end{aligned}\right.$$

Dans la première expression de S, la dernière somme s'étend à toutes les décompositions de m en deux facteurs d, δ, tandis que, dans la première somme, on doit exclure la décomposition $d=m$, $\delta=1$. Dans la deuxième expression de S, la somme unique indiquée par Σ s'étend à toutes les décompositions du nombre m en deux facteurs, mais avec cette restriction de réduire à son premier terme la somme

$$f(d, 0)+2f(d, 2)+\ldots+2f(d, \delta-1),$$

lorsque δ est égal à 1.

16. Dans l'équation (2), un seul des deux termes Aa ou Bb est pair. Par conséquent, à toute solution dans laquelle le second terme est pair, il en correspond une autre dans laquelle il est impair, par le seul échange des deux lettres A, B et des deux lettres a, b. On réduit donc de moitié le nombre des termes de S lorsque, posant $A=\alpha$, $B=2^i\beta$ et désignant par α et β deux nombres impairs, on remplace l'équation (2) par la suivante,

$$(8)\qquad m=a\alpha+2^i b\beta;$$

à chaque solution de cette équation correspondent deux solutions de l'équation (2) par les formules

$$A = \alpha, \qquad B = 2^i\beta, \qquad a = a, \qquad b = b,$$
$$A_1 = 2^i\beta, \qquad B_1 = \alpha, \qquad a_1 = b, \qquad b_1 = b,$$

et, conséquemment, deux termes égaux de S, savoir :

$$[f(\alpha - 2^i\beta,\ a + b) - f(\alpha + 2^i\beta,\ a - b)],$$
$$[f(2^i\beta - \alpha,\ a + b) - f(2^i\beta + \alpha,\ b - a)].$$

A la somme de ces deux termes, nous substituons le double du premier, et nous écrivons

$$(9) \qquad S = 2\Sigma[f(\alpha - 2^i\beta,\ a + b) - f(\alpha + 2^i\beta,\ a - b)],$$

en désignant par Σ une somme dont les éléments correspondent aux diverses solutions de l'équation (8) en nombres impairs et positifs a, b, α, β, l'exposant i n'étant soumis qu'à la condition d'être entier et positif. Il est avantageux, dans les applications, de remplacer la somme simple relative à l'équation (8) par une somme triple relative au système des trois équations

$$(10) \qquad m = m' + 2^i m'', \qquad m' = a\alpha, \qquad m'' = b\beta,$$

dans lesquelles on désigne par m', m'', a, b, α, β des nombres impairs et positifs, et par i un exposant pair ou impair. En substituant dans la formule (6) cette expression de S, on obtient, à la notation près, la formule (d) que Liouville a donnée dans son *cinquième article* (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. III, p. 274), savoir :

$$(d) \left\{ \begin{aligned} & 2\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(\alpha - 2^i\beta,\ a + b) - f(\alpha + 2^i\beta,\ a - b)]\} \\ & \quad = \Sigma[f(d, 0) + 2f(d, 2) + 2f(d, 4) + \ldots + 2f(d, \delta - 1)] - \Sigma d f(d, 0). \end{aligned} \right.$$

17. Lorsqu'on réduit la fonction $f(x, y)$ à une fonction paire de la seule variable x, c'est-à-dire à une fonction $f(x)$ vérifiant la condition $f(-x) = f(x)$ pour toutes les valeurs de x employées dans notre

formule, le premier membre de la formule (d) devient

$$2\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(\alpha-2^i\beta)-f(\alpha+2^i\beta)]\}.$$

Dans la première somme du second membre, tous les termes de la somme partielle qui correspond à une solution de l'équation $m=d\delta$ sont égaux à $f(d)$, et leur nombre est

$$1+2\frac{\delta-1}{2}=\delta;$$

cette première somme est donc égale à $\Sigma\,\delta f(d)$, et l'on a

$$\text{(F)}\qquad 2\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(\alpha-2^i\beta)-f(\alpha+2^i\beta)]\}=\Sigma(\delta-d)f(d).$$

Si l'on suppose, au contraire, que la fonction $f(x,y)$ est une fonction paire de y, indépendante de x, le premier membre de la formule (d) devient

$$2\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a+b)-f(a-b)]\}.$$

La première somme du second membre est égale à

$$\Sigma[f(0)+2f(2)+2f(4)+\ldots+2f(\delta-1)],$$

avec la restriction de réduire à son premier terme $f(0)$ la somme partielle relative au diviseur δ, lorsque $\delta=1$. Quant à la deuxième somme, elle se réduit à

$$\Sigma\,df(0)=f(0)\,\zeta_1(m),$$

$\zeta_1(m)$ désignant la somme des diviseurs de m. En changeant les signes des deux membres, on obtient la formule (D), donnée par Liouville dans son troisième article (*loc. cit.*, p. 201), savoir :

$$\text{(D)}\quad\left\{\begin{aligned}&\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a-b)-f(a+b)]\}\\&\quad=f(0)\zeta_1(m)-\Sigma[f(0)+2f(2)+2f(4)+\ldots+2f(d-1)];\end{aligned}\right.$$

la somme partielle renfermée entre crochets doit être réduite à son premier terme $f(0)$ lorsque $d = 1$.

On obtient encore une formule remarquable en prenant dans la formule (D)

$$f(x) = F(x+1) - F(x-1),$$

$F(x)$ désignant une fonction impaire de x. On vérifie d'abord que la condition $f(x) = f(-x)$ se trouve remplie, car on a

$$f(-x) = F(-x+1) - F(-x-1) = -F(x-1) + F(x+1).$$

Pour trouver ce que devient alors le second membre de la formule (D), il faut remarquer que l'on a

$$\begin{aligned} f(0) &= 2F(1), \qquad 2f(2) = 2F(3) - 2F(1), \\ 2f(4) &= 2F(5) - 2F(3), \qquad \ldots, \\ 2f(d-1) &= 2F(d) - 2F(d-2). \end{aligned}$$

En faisant la somme de ces expressions, on trouve

$$f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(d-1) = 2F(d).$$

Ainsi, en divisant par 2 la formule (D) et en changeant les signes, on obtient la formule (E) de Liouville (*loc. cit.*, p. 206)

$$(E) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma\{\Sigma\Sigma[F(a-b+1) - F(a-b-1) \\ &\qquad - F(a+b+1) + F(a+b-1)]\} = F(1)\zeta_1(m) - \Sigma F(d). \end{aligned} \right.$$

18. Liouville a donné, dans son cinquième article (*loc. cit.*, p. 281), une autre formule générale que l'on peut obtenir par la combinaison des deux formules (b) et (d) (nos 10 et 16). Si, dans la formule (b), on remplace $f(x, y)$ par $f(2^e x, y)$, elle devient

$$(b') \quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma[f(2^e\alpha - 2^e\beta, a+b) - f(2^e\alpha + 2^e\beta, a-b)] \\ &\quad = 2^{\lambda-1}\Sigma d[f(0, 2^\lambda d) - f(2^{\lambda+e} d, 0)], \end{aligned} \right.$$

la somme indiquée dans le second membre s'étendant à toutes les dé-

compositions du nombre m en deux facteurs d, δ, tandis que la somme du premier membre correspond aux différentes solutions de l'équation

$$2^{\lambda} m = a\alpha + b\beta,$$

ou, ce qui revient au même, de l'équation

$$(11) \qquad 2^{\lambda+c} m = 2^c a\alpha + 2^c b\beta$$

en nombres impairs et positifs a, b, α, β.

De même, si l'on remplace $f(x, y)$ par $f(2^l x, y)$ dans la formule (d), on a

$$(d') \quad \left\{ \begin{aligned} & 2\Sigma[f(2^l\alpha - 2^{l-i}\beta, a+b) - f(2^l\alpha + 2^{l+i}\beta, a-b)] \\ & \quad = \Sigma[f(2^l d, 0) + 2f(2^l d, 2) + 2f(2^l d, 4) + \ldots + 2f(2^l d, \delta - 1)] \\ & \qquad - \Sigma\, d\, f(2^l d, 0), \end{aligned} \right.$$

la somme indiquée dans le premier membre s'étendant aux diverses solutions de l'équation

$$(12) \qquad 2^l m = 2^l a\alpha + 2^{l+i} b\beta$$

en nombres impairs et positifs a, b, α, β; l'exposant i se trouve déterminé dans chaque solution, par la condition de donner une valeur impaire au quotient $(m - a\alpha) : 2^i$.

19. Considérons maintenant l'équation

$$(13) \qquad 2^l m = 2^p a\alpha + 2^q b\beta,$$

dans laquelle les nombres m, a, b, α, β sont impairs et positifs, tandis que les exposants p, q peuvent être positifs ou nuls. Le nombre m et l'exposant l sont donnés, et l'on détermine de toutes les manières possibles les nombres a, b, α, β, p et q, de manière à vérifier l'équation (13): puis, à chaque solution, on fait correspondre un terme

$$[f(2^p\alpha - 2^q\beta, a+b) - f(2^p\alpha + 2^q\beta, a-b)];$$

enfin on fait la somme de tous les termes semblables qui correspondent aux diverses solutions de l'équation (13), et l'on désigne cette somme par S. On a ainsi

$$S = \Sigma[f(2^p\alpha - 2^q\beta, a+b) - f(2^p\alpha + 2^q\beta, a-b)].$$

Les solutions de l'équation (13) peuvent se partager en divers groupes, suivant les valeurs des exposants p, q. Tant que l'un de ces exposants est inférieur à l, ces exposants sont égaux; on a

$$p = q = e, \qquad 2^{l-e}m = a\alpha + b\beta.$$

La somme S_e des termes de S qui correspondent à la valeur e des exposants p, q se déduit de la formule (b') en y faisant $\lambda = l - e$. On trouve ainsi

$$(14) \qquad S_e = 2^{l-e-1}\Sigma d[f(0, 2^{l-e}d) - f(2^l d, 0)].$$

Lorsque le plus petit des deux exposants p, q est égal à l, l'autre doit être plus grand. Nous désignerons par S_l la partie de la somme S qui correspond à cette hypothèse, et nous poserons

$$2^p\alpha = 2^l A, \qquad 2^q\beta = 2^l B.$$

L'un des deux nombres A, B sera pair et l'autre impair, et l'on aura

$$\begin{aligned} S_l &= \Sigma[f(2^l A - 2^l B, a+b) - f(2^l A + 2^l B, a-b)] \\ &= 2\Sigma[f(2^l\alpha - 2^{l+i}\beta, a+b) - f(2^l\alpha + 2^{l+i}\beta, a-b)]. \end{aligned}$$

La somme indiquée dans la première expression correspond aux diverses solutions de l'équation

$$m = Aa + Bb,$$

en nombres entiers et positifs A, B, a, b, dont les deux derniers doivent être impairs, tandis que les termes de la deuxième expression correspondent aux diverses solutions de l'équation

$$(12) \qquad m = a\alpha + 2^i b\beta$$

en nombres impairs et positifs a, b, α, β. Nous avons montré (n° **16**) que la première somme est double de la seconde.

La somme S, relative à l'équation (13), s'obtient en ajoutant à la somme S_l, que nous venons de définir, la somme des termes qui correspondent aux solutions où les deux exposants p, q ont une valeur commune e, inférieure à l; en un mot, on a

$$S = S_0 + S_1 + \ldots + S_{l-1} + S_l.$$

Or on déduit de la formule (14)

$$\sum_1^{l-1} S_e = \Sigma d[f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + 4f(0, 8d) + \ldots + 2^{l-1} f(0, 2^l d)]$$
$$- (2^l - 1)\Sigma d f(2^l d, 0).$$

D'un autre côté, la formule (d') donne

$$S_l = \Sigma[f(2^l d, 0) + 2f(2^l d, 2) + \ldots + 2f(2^l d, \delta - 1)]$$
$$- \Sigma d f(2^l d, 0).$$

En ajoutant ces formules membre à membre, on trouve

$$(e)\quad \left\{\begin{aligned} S &= \Sigma\{\Sigma\Sigma[f(2^p\alpha - 2^q\beta, a + b) - f(2^p\alpha + 2^q\beta, a - b)]\} \\ &= \Sigma d[f(0, 2d) + 2f(0, 4d) + 4f(0, 8d) + \ldots + 2^{l-1} f(0, 2^l d)] \\ &\quad + \Sigma[f(2^l d, 0) + 2f(2^l d, 2) + \ldots + 2f(2^l d, \delta - 1)] \\ &\quad - 2^l \Sigma d f(2^l d, 0). \end{aligned}\right.$$

Si l'on réduit la fonction $f(x, y)$ successivement à une fonction paire de x et à une fonction paire de y, on déduit de la formule (e) les deux formules suivantes :

$$(G)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(2^p\alpha - 2^q\beta) - f(2^p\alpha + 2^q\beta)]\} \\ &\quad = (2^l - 1) f(0) \zeta_1(m) + \Sigma(\delta - 2^l d) f(2^l d), \end{aligned}\right.$$

$$(J)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\{\Sigma\Sigma[f(a + b) - f(a - b)]\} \\ &\quad = \Sigma d[f(2d) + 2f(4d) + \ldots + 2^{l-1} f(2^l d)] \\ &\quad + \Sigma[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + \ldots + 2f(\delta - 1)] \\ &\quad - 2^l f(0) \zeta_1(m). \end{aligned}\right.$$

Dans ces trois formules, nous avons remplacé la somme simple relative aux diverses solutions de l'équation (13) par une somme triple qui correspond aux divers systèmes de solutions des trois équations

$$(15)\qquad 2^t m = 2^p m' + 2^q m'', \qquad m' = a\alpha, \qquad m'' = b\beta_1.$$

Les sommes indiquées dans les seconds membres se rapportent aux diverses décompositions du nombre m en deux facteurs d, δ, mais avec cette restriction que la deuxième somme, dans la formule (e) et, dans la formule (J), que la somme partielle renfermée entre crochets doit être réduite à son premier terme, lorsque $\delta = 1$.

Liouville a encore donné quelques autres formules dans les articles cités; mais, comme il indique suffisamment la manière dont elles se déduisent des formules que nous venons de démontrer, nous n'avons pas à nous en occuper.

III. — Formules relatives aux deux équations

$$2m = a\alpha + b\beta_1, \qquad m = d_1\delta_1 + 2^t d_2\delta_2.$$

20. Nous partageons d'abord le double d'un nombre impair m de toutes les manières possibles, en deux parties impaires et positives m', m''; puis nous cherchons toutes les décompositions de chacun de ces nombres en deux facteurs. En un mot, nous calculons les différents systèmes de solutions des trois équations

$$(1)\qquad 2m = m' + m'', \qquad m' = a\alpha, \qquad m'' = b\beta_1$$

en nombres impairs et positifs. A chacune de ces solutions nous faisons correspondre une expression de la forme suivante

$$(-1)^{\frac{t-1}{2}}\left[\mathcal{F}(a+b,\ \alpha-\beta_1) + \mathcal{F}(a-b,\ \alpha+\beta_1)\right],$$

où l'on désigne par $\mathcal{F}(x, y)$ une fonction des deux variables x et y, impaire par rapport à x et paire par rapport à y; c'est-à-dire une fonction vérifiant les conditions

$$\mathcal{F}(x, -y) = \mathcal{F}(x, y), \qquad \mathcal{F}(-x, y) = -\mathcal{F}(x, y), \qquad \mathcal{F}(0, y) = 0.$$

pour toutes les valeurs de x et de y employées dans nos formules. Enfin nous formons la somme S de toutes les expressions semblables qui correspondent aux différents systèmes de solutions des équations (1). C'est ce que nous exprimons par la formule

$$S = \Sigma \left| \Sigma\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} \left[\mathfrak{F}(a+b, \alpha-\beta) + \mathfrak{F}(a-b, \alpha+\beta) \right] \right|,$$

où nous indiquons entre parenthèses les deux intégrations relatives aux deux équations $m' = a\alpha$, $m'' = b\beta$.

Comme les équations (1) ne changent pas lorsqu'on permute entre elles les lettres grecques et les lettres latines correspondantes, on a

$$\Sigma^2(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} \mathfrak{F}(a-b, \alpha+\beta) = \Sigma^2(-1)^{\frac{\beta-1}{2}} \mathfrak{F}(\alpha-\beta, a+b);$$

de plus, le système des équations (1) peut être remplacé par l'équation

$$(2) \qquad 2m = a\alpha + b\beta.$$

La somme S peut donc s'exprimer par la formule

$$S = \Sigma \left[(-1)^{\frac{b-1}{2}} \mathfrak{F}(a+b, \alpha-\beta) + (-1)^{\frac{\beta-1}{2}} \mathfrak{F}(\alpha-\beta, a+b) \right],$$

dans laquelle le signe sommatoire se rapporte aux diverses solutions de l'équation (2) en nombres impairs et positifs.

21. Désignons par S_0 la partie de la somme S qui correspond à l'hypothèse $\alpha = \beta$. La valeur commune des deux nombres α, β est un diviseur de m: nous le désignerons par δ et nous remplacerons l'équation (2) par les deux suivantes

$$(3) \qquad m = d\delta, \qquad 2d = a + b.$$

Comme la fonction $\mathfrak{F}(x, y)$ vérifie la condition $\mathfrak{F}(0, a+b) = 0$, la somme partielle S_0 est exprimée par la formule

$$S_0 = \Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}} \mathfrak{F}(2d, 0).$$

dans laquelle le signe Σ s'étend à tous les systèmes de valeurs de d et de b propres à vérifier les équations (3). Or, pour chaque diviseur d de m, le nombre b reçoit les valeurs $1, 3, 5, \ldots, 2d-1$. La somme des facteurs $(-1)^{\frac{b-1}{2}}$ qui correspondent à une même valeur de d est donc

$$1 - 1 + 1 + \ldots + (-1)^{d-1} = 1;$$

par conséquent, on a

$$S_0 = \Sigma \mathcal{F}(2d, 0),$$

le signe Σ se rapportant aux diverses solutions de l'équation $m = d\delta$.

Les autres termes de S peuvent se grouper deux à deux, au moyen des formules

$$a' = b, \qquad b' = a, \qquad \alpha' = \beta, \qquad \beta' = \alpha,$$

qui correspondent à la permutation des deux termes $a\alpha$, $b\beta$, et en vertu desquelles on aura

$$\begin{aligned} a' + b' &= a + b, \\ \alpha' - \beta' &= -(\alpha - \beta), \\ \mathcal{F}(a' + b', \alpha' - \beta') &= \mathcal{F}(a + b, \alpha - \beta), \\ \mathcal{F}(\alpha' - \beta', a' + b') &= -\mathcal{F}(\alpha - \beta, a + b). \end{aligned}$$

De plus, nous pouvons supposer que celle des deux solutions par laquelle nous exprimons la somme des deux termes d'un même groupe satisfait à l'inégalité $\alpha - \beta > 0$, puisque les deux différences $\alpha' - \beta'$, $\alpha - \beta$ sont de signes contraires. On peut donc exprimer la somme S par la formule

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} S = \Sigma F(2d, 0) &+ \Sigma_1 \left[(-1)^{\frac{a-1}{2}} + (-1)^{\frac{b-1}{2}}\right] \mathcal{F}(a + b, \alpha - \beta) \\ &+ \Sigma_2 \left[(-1)^{\frac{\beta_1 - 1}{2}} - (-1)^{\frac{\alpha_1 - 1}{2}}\right] \mathcal{F}(\alpha_1 - \beta_1, a_1 + b_1). \end{aligned} \right.$$

en désignant par Σ_1 une somme dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (2) dans lesquelles la différence

$\alpha - \beta$ est positive, et par Σ_2 une somme relative à l'équation

$$(2') \qquad 2m = a_1\alpha_1 + b_1\beta_1,$$

et soumise à la restriction $\alpha_1 - \beta_1 > 0$.

22. Nous distinguons les deux équations (2) et (2'), quoiqu'elles ne diffèrent que par les notations, afin de grouper chaque terme de Σ_1 avec un terme de Σ_2 vérifiant les relations

$$(A) \qquad \alpha_1 - \beta_1 = a + b, \qquad a_1 + b_1 = \alpha - \beta.$$

Pour démontrer que cela est toujours possible, nous écrirons les équations (2) et (2') de la manière suivante

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} 2m &= (a+b)\beta + (\alpha - \beta)a, \\ 2m &= (\alpha_1 - \beta_1)a_1 + (a_1 + b_1)\beta_1. \end{aligned}$$

Au moyen des relations (A), la dernière formule peut s'écrire

$$(\beta) \qquad 2m = (a+b)a_1 + (\alpha - \beta)\beta_1.$$

Or, en comparant les deux formules (α), (β), on voit que la dernière est une conséquence de la première, pourvu que l'on prenne

$$(B) \qquad a_1 = \beta - \theta(\alpha - \beta), \qquad \beta_1 = a + \theta(a+b)$$

en désignant par θ un nombre entier quelconque. De plus, nous montrerons que l'on peut déterminer le nombre θ de manière que la solution a_1, b_1, α_1, β_1 de l'équation (2') vérifie toutes les conditions supposées dans la somme Σ_2. En effet, en résolvant les équations (A) et (B), on trouve

I.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a + (\theta+1)(a+b), & \beta_1 &= a + \theta(a+b), \\ a_1 &= \beta - \theta(\alpha - \beta), & b_1 &= (\theta+1)(\alpha - \beta) - \beta. \end{aligned}$$

Les quatre nombres a, b, α, β étant impairs, les quatre nombres dé-

terminés par ces formules sont aussi impairs, quel que soit le nombre θ; mais, pour que les deux nombres a_1, b_1 soient positifs, il faut que θ vérifie les deux inégalités

$$(5) \qquad \theta < \frac{\beta}{\alpha - \beta} < \theta + 1.$$

La différence $\alpha - \beta$ étant paire et positive, tandis que β est impair, le rapport $\beta : (\alpha - \beta)$ est une fraction positive, dont la partie entière est nulle ou positive. On satisfait aux inégalités (5) en égalant θ à cette partie entière, et on ne peut le faire que de cette manière.

De plus, la valeur de θ étant positive, les nombres α_1, β_1 sont aussi positifs et l'on voit qu'ils satisfont à la condition $\alpha_1 - \beta_1 > 0$ supposée dans la somme Σ_2.

Par conséquent, à chacun des termes de Σ_1, les formules I font correspondre un terme de Σ_2, et un seul.

23. Je dis en outre que le même terme de Σ_2 ne correspond jamais, dans les formules I, à deux termes de Σ_1. Car, si cela avait lieu, on aurait en même temps les formules I et les formules suivantes :

$$\alpha_1 = a' + (\theta' + 1)(a' + b'), \qquad \beta_1 = a' + \theta'(a' + b'),$$
$$a_1 = \beta' - \theta'(\alpha' + \beta'), \qquad b_1 = (\theta' + 1)(\alpha' - \beta') - \beta'.$$

On en déduirait respectivement les deux systèmes suivants :

II.

$$\alpha = (\theta + 1)(a_1 + b_1) + a_1, \qquad \beta = \theta(a_1 + b_1) + a_1,$$
$$a = \beta_1 - \theta(\alpha_1 - \beta_1), \qquad b = (\theta + 1)(\alpha_1 + \beta_1) - \beta_1;$$
$$\alpha' = (\theta' + 1)(a_1 + b_1) + a_1, \qquad \beta' = \theta'(a_1 + b_1) + a_1,$$
$$a' = \beta_1 - \theta'(\alpha_1 - \beta_1), \qquad b' = (\theta' + 1)(\alpha_1 - \beta_1) - \beta_1.$$

Or les conditions $a > 0$, $b > 0$ déterminent θ par les inégalités

$$\theta < \frac{\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} < \theta + 1;$$

de même les conditions $a' > 0$, $b' > 0$ exigent que l'on ait

$$\theta' < \frac{\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} < \theta' + 1;$$

on a donc

$$\theta' = \theta = \mathrm{E}\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}\right),$$

en désignant par $\mathrm{E}(x)$ la partie entière du nombre x. Les deux nombres θ, θ' étant égaux, on a

$$a' = a, \qquad b' = b, \qquad \alpha' = \alpha, \qquad \beta' = \beta;$$

c'est-à-dire que les formules I ne font jamais correspondre la même solution de l'équation (2') à deux solutions différentes de l'équation (2).

Ainsi les formules (A) et (B) jointes aux inégalités (5) groupent chacun des termes de Σ_1 avec un des termes de Σ_2, et inversement, de telle manière que le même terme ne se trouve jamais répété. Comme, en vertu des formules (A), on a

$$\mathcal{F}(\alpha_1 - \beta_1, a_1 + b_1) = \mathcal{F}(a + b, \alpha - \beta),$$

la somme des deux termes d'un même groupe est

$$\left[(-1)^{\frac{a-1}{2}} + (-1)^{\frac{b-1}{2}} + (-1)^{\frac{\beta_1 - 1}{2}} - (-1)^{\frac{\alpha_1 - 1}{2}}\right]\mathcal{F}(a + b, \alpha - \beta),$$

et la somme proposée est exprimée par la formule

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} S = {} & \Sigma\mathcal{F}(2d, 0) \\ & + \Sigma_1\left[(-1)^{\frac{a-1}{2}} + (-1)^{\frac{b-1}{2}} + (-1)^{\frac{\beta_1 - 1}{2}} - (-1)^{\frac{\alpha_1 - 1}{2}}\right]\mathcal{F}(a + b, \alpha - \beta).\end{aligned}\right.$$

dans laquelle Σ_1 indique une somme dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation

$$(2)\qquad 2m = a\alpha + b\beta$$

qui vérifient la condition $\alpha > \beta$, et les deux exposants α_1, β_1 sont dé-

terminés par les équations

$$(7)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = a + (\theta + 1)(a + b), \\ \beta_1 = a + \theta(a + b), \\ \theta = \mathrm{E}\left(\dfrac{\beta}{\alpha - \beta}\right). \end{cases}$$

24. L'expression précédente de la somme S peut se simplifier. D'abord on conclut de l'équation (2), mise sous la forme

$$(\alpha)\qquad 2m = (a + b)\beta + (\alpha - \beta)a,$$

que l'un des deux nombres $(a + b)$, $(\alpha - \beta)$ est de la forme $4l$, et l'autre, de la forme $4l + 2$. Supposons d'abord

$$a + b \equiv 0 \pmod 4, \qquad \alpha - \beta \equiv 2 \pmod 4;$$

on déduit des formules (7)

$$\alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv a \pmod 4;$$

par conséquent

$$(-1)^{\frac{\beta_1 - 1}{2}} = (-1)^{\frac{\alpha_1 - 1}{2}}, \qquad (-1)^{\frac{a-1}{2}} + (-1)^{\frac{b-1}{2}} = 0;$$

le terme correspondant de Σ_1 s'évanouit. Il ne reste ainsi dans cette somme que les termes où l'on a

$$a + b = 2d_1, \qquad \alpha - \beta = 2^{i+1} d_2,$$

en désignant par d_1, d_2 deux nombres impairs, et par i un exposant entier et positif. Comme on a dans ce cas

$$\frac{a-1}{2} \equiv \frac{b-1}{2}, \qquad \frac{\beta_1 - 1}{2} \equiv \frac{a-1}{2} + \theta \equiv -\frac{\alpha_1 - 1}{2} \pmod 2$$

le coefficient correspondant de $\mathfrak{F}(a + b, \alpha - \beta)$ dans la formule (6) est égal à

$$2(-1)^{\frac{a-1}{2}}[1 + (-1)^{\theta}], \qquad \theta = \mathrm{E}\left(\frac{\beta}{\alpha - \beta}\right).$$

Comme ce coefficient se réduit à

$$4(-1)^{\frac{a-1}{2}} \quad \text{ou à} \quad 0,$$

suivant que θ est pair ou impair, on peut remplacer la formule (6) par la suivante

$$(8) \qquad S = \Sigma \mathfrak{F}(2d, 0) + 4\Sigma'(-1)^{\frac{a-1}{2}} \mathfrak{F}(a+b, \alpha-\beta),$$

dans laquelle on désigne par Σ' une somme dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (2), qui satisfont aux conditions

$$(C) \quad \alpha > \beta, \qquad a \equiv b \pmod 4, \qquad \theta = E\left(\frac{\beta}{\alpha-\beta}\right) \equiv 0 \pmod 2.$$

25. Les deux premières conditions sont vérifiées lorsqu'on prend, comme nous l'avons indiqué plus haut,

$$(a) \qquad a+b = 2d_1, \qquad \alpha-\beta = 2^{i+1}d_2$$

en désignant par d_1, d_2 deux nombres positifs, impairs. En substituant ces expressions dans l'équation (2) mise sous la forme (α), on a

$$(9) \qquad m = d_1\beta + 2^i d_2 a,$$

et l'on peut remplacer la formule (8) par la suivante

$$(8') \qquad S = \Sigma \mathfrak{F}(2d, 0) + 4\Sigma_1(-1)^{\frac{a-1}{2}} \mathfrak{F}(2d_1, 2^{i+1}d_2),$$

en désignant par Σ_1 une somme dont les éléments correspondent à celles des solutions de l'équation (9) en nombres impairs et positifs d_1, d_2, α, β, qui vérifient les conditions

$$a < 2d_1, \qquad \theta = E\left(\frac{\beta}{2^{i+1}d_2}\right) \equiv 0 \pmod 2.$$

Mais la somme Σ_1 peut être remplacée par la somme

$$S_1 = \Sigma(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} \mathfrak{F}(2d_1, 2^{i+1}d_2)$$

étendue à toutes les solutions de l'équation

$$(10) \qquad m = d_1\delta_1 + 2^i d_2\delta_2$$

en nombres impairs et positifs $d_1, d_2, \delta_1, \delta_2$, l'exposant i pouvant être pair ou impair. En effet, si l'on cherche dans les deux sommes S_1, Σ_1 les termes qui correspondent à un même système de valeurs de d_1 et $2^i d_2$, on trouve que cette somme partielle a la même valeur dans les deux sommes considérées. D'abord toutes les solutions de l'équation (9) s'expriment au moyen de l'une d'elles a_0, β_0 par les formules

$$a = a_0 + kd_1, \qquad \beta = \beta_0 - k\,2^i d_2;$$

mais, pour que le nombre a soit impair, a_0 et β_0 étant supposés impairs, il faut que le nombre k soit pair. Posant donc $k = 2\lambda$, on a

$$a = a_0 + \lambda\,2d_2, \qquad \beta = \beta_0 - \lambda\,2^{i+1}d_2.$$

La première de ces formules montre qu'une seule de ces solutions (a, β) satisfait à la double condition

$$0 < a < 2d_1.$$

Par conséquent, à chaque système de valeurs de d_1 et $2^i d_2$, il ne peut correspondre qu'un seul terme de Σ_1, savoir

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}}\mathcal{F}(2d_1, 2^{i+1}d_2);$$

mais, pour qu'il existe effectivement, il faut que la valeur correspondante de β vérifie la condition

$$0 = E\left(\frac{\beta}{2^{i+1}d_2}\right) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,2).$$

Or il en est de même pour S_1. Car toutes les solutions de l'équation (10) en nombres impairs sont données par les formules

$$\delta_2 = a + \lambda\,2d_1, \qquad \delta_1 = \beta - \lambda\,2^{i+1}d_2.$$

Le nombre a étant $< 2d_1$, δ_2 ne peut être positif qu'autant que λ est nul ou positif; pour que δ_1 soit aussi positif, il faut que λ ne surpasse pas la partie entière θ du quotient $\beta : 2^{i+1}d_2$. Le nombre δ_2 ne peut donc avoir que les $(\theta+1)$ valeurs qui correspondent aux valeurs $0, 1, 2, \ldots, \theta$ de λ. D'ailleurs, pour chaque valeur de λ, on a

$$\frac{\delta_2-1}{2} \equiv \frac{a-1}{2} + \lambda \pmod 2, \qquad (-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} = (-1)^{\frac{a-1}{2}}(-1)^{\lambda}.$$

La somme des termes de S_1 qui correspondent à un même système $(d_1, 2^i d_2)$ est donc

$$\mathfrak{F}(2d_1, 2^{i+1}d_2)(-1)^{\frac{a-1}{2}}\Sigma_0^{\theta}(-1)^{\lambda};$$
$$\Sigma(-1)^{\lambda} = 1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^{\theta} = 1 \quad \text{ou} \quad 0$$

suivant que θ est pair ou impair. Par conséquent la somme partielle considérée se réduit à

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}}\mathfrak{F}(2d_1, 2^{i+1}d_2)$$

si θ est pair, et à zéro si θ est impair. Les deux sommes Σ_1 et S_1 sont donc égales.

26. En remplaçant dans la formule (8′) S par son expression en somme simple, relative à l'équation (2), et Σ_1 par l'expression de la somme équivalente S_1, on obtient la formule suivante

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}}[\mathfrak{F}(a+b, \alpha-\beta) + \mathfrak{F}(a-b, \alpha+\beta)] \\ &\quad = \Sigma\mathfrak{F}(2d, 0) + 4\Sigma(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}}\mathfrak{F}(2d_1, 2^{i+1}d_2), \end{aligned}\right.$$

que Liouville a donnée dans son dix-huitième article (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. X, p. 169).

Lorsqu'on réduit la formule $\mathfrak{F}(x, y)$ à une fonction impaire de x, indépendante de y, c'est-à-dire à une fonction $F(x)$ vérifiant les conditions

$$F(-x) = -F(x), \qquad F(0) = 0,$$

pour toutes les valeurs de x employées dans nos formules, on obtient la formule suivante :

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}}[\mathrm{F}(a+b)+\mathrm{F}(a-b)] \\ &\quad = \Sigma\,\mathrm{F}(2d)+4\Sigma(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}}\mathrm{F}(2d_1). \end{aligned}\right.$$

La deuxième somme du second membre peut être remplacée par une somme triple relative aux trois équations

$$(10)\qquad m = m_1 + 2^t m_2, \qquad m_1 = d_1\delta_1, \qquad m_2 = d_2\delta_2.$$

Les sommations relatives aux deux dernières équations se trouvant séparées, on peut effectuer celle qui correspond à l'équation $m_2 = d_2\delta_2$; posant donc

$$\Sigma(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}} = \rho(m_2),$$

et remplaçant la somme simple du premier membre par une somme triple, relative aux trois équations (1), on obtient la formule (L) donnée par Liouville, dans son sixième article (*Journal de Mathématiques*, t. III, p. 327), savoir

$$(\mathrm{L})\qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\{\Sigma\Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}}[\mathrm{F}(a+b)+\mathrm{F}(a-b)]\} \\ &\quad = \Sigma\,\mathrm{F}(2d)+4\Sigma[\rho(m_2)\Sigma\,\mathrm{F}(2d_1)]. \end{aligned}\right.$$

27. On démontre d'une manière semblable une autre formule donnée par Liouville dans son dix-septième article (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. X, p. 135) et qui se rapporte, comme la précédente, aux deux équations

$$2m = a\alpha + b\beta, \qquad m = d_1\delta_1 + 2^t d_2\delta_2.$$

Mais on y considère une fonction $\psi(x, y)$ symétrique par rapport aux deux variables x, y, et paire relativement à chacune de ces variables.

On forme d'abord la somme

$$S' = \Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{b-1}{2}}\psi(a-b, \alpha+\beta)$$

relative à toutes les solutions de l'équation (2)

$$2m = a\alpha + b\beta$$

en nombres impairs et positifs a, b, α, β; puis une seconde somme

$$S_1 = \Sigma(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}+\frac{\delta_2-1}{2}}\psi(2d_1, 2^{i+1}d_2)$$

relative à l'équation

$$(10) \qquad m = d_1\delta_1 + 2^t d_2\delta_2.$$

Nous démontrerons qu'il existe entre ces deux sommes la relation

$$S' = S + 4S_1,$$

où l'on désigne par S la somme

$$S = \Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\psi(0, 2d),$$

relative aux décompositions du nombre m en deux facteurs d, δ.

Cherchons d'abord la partie de S′ qui correspond à l'hypothèse $a = b$.

La valeur commune de a et de b étant un diviseur du nombre m, désignons-la par δ et posons

$$m = d\delta.$$

La partie cherchée de S′ correspond aux deux équations

$$m = d\delta, \qquad 2d = \alpha + \beta,$$

et la somme des termes qui correspondent à une même valeur de δ est égale à

$$(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\psi(0, 2d)\,\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}},$$

la sommation indiquée par Σ s'étendant à toutes les valeurs de α impaires et inférieures à $2d$; on a donc

$$\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} = 1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^{d-1} = 1.$$

La somme des termes de S′ qui correspondent à l'hypothèse

$$a = b = \delta$$

se réduit donc au terme unique

$$(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \psi(0, 2d),$$

et la somme de tous les termes de S′ qui correspondent aux solutions de l'équation (2), dans lesquelles a et b sont égaux, est égale à la somme S, de sorte que l'on peut poser

$$S' = S + S'',$$

en désignant par S″ la somme des termes de S′ dans lesquels les deux nombres a et b sont inégaux.

28. Or la somme S″ est égale au quadruple de la somme S_1. D'abord on peut grouper deux à deux les termes de S″ au moyen des formules

$$a' = b, \qquad b' = a, \qquad \alpha' = \beta, \qquad \beta' = \alpha.$$

La fonction $\psi(x, y)$ étant paire par rapport à x, on a

$$\psi(a' - b', \alpha' + \beta') = \psi(a - b, \alpha + \beta),$$

et la somme des deux termes devient

$$\left[(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{b-1}{2}} + (-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{a-1}{2}}\right] \psi(a - b, \alpha + \beta),$$

et nous pouvons supposer que la solution a, b, α, β au moyen de laquelle nous exprimons la somme des deux termes est celle des deux solutions du groupe considéré, qui vérifie la condition $a > b$. Or, en

écrivant l'équation (2) sous la forme

$$2m = (a - b)\alpha + (\alpha - \beta)b + 2b\beta,$$

on voit que l'on a

$$\frac{a-b}{2} \equiv \frac{\alpha - \beta}{2} \pmod 2,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\alpha - 1}{2} + \frac{b-1}{2} \equiv \frac{\beta - 1}{2} + \frac{a-1}{2} \pmod 2,$$

$$(-1)^{\frac{\alpha-1}{2} + \frac{b-1}{2}} = (-1)^{\frac{\beta-1}{2} + \frac{a-1}{2}}.$$

On a donc

$$S'' = 2\Sigma_1 (-1)^{\frac{\alpha-1}{2} + \frac{b-1}{2}} \psi(a - b, \alpha + \beta),$$

en désignant par Σ_1 une somme dont les termes correspondent à celles des solutions de l'équation (2) en nombres impairs et positifs, qui satisfont à la condition $a - b > 0$.

29. Afin de profiter d'une partie de la démonstration de la formule (11), nous échangerons entre elles les lettres grecques et les lettres latines correspondantes, et nous écrirons

$$S'' = 2\Sigma_1 (-1)^{\frac{\beta-1}{2} + \frac{a-1}{2}} \psi(\alpha - \beta, a + b),$$

en désignant par Σ_1 une somme relative à celles des solutions de l'équation (2) qui vérifient la condition $\alpha - \beta > 0$.

Nous avons vu (n^os **22** et **25**) que toutes ces solutions peuvent se grouper deux à deux au moyen des formules

$$(\mathrm{A}) \qquad \alpha_1 - \beta_1 = a + b, \qquad a_1 + b_1 = \alpha - \beta,$$

$$(\mathrm{B}) \qquad a_1 = \beta - \theta(\alpha - \beta), \qquad \beta_1 = a + \theta(a + b),$$

dans lesquelles le nombre θ, en vertu des conditions $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, est déterminé par les inégalités

$$(5) \qquad \theta < \frac{\beta}{\alpha - \beta} < \theta + 1, \qquad \theta = \mathrm{E}\left(\frac{\beta}{\alpha - \beta}\right).$$

La somme des deux termes d'un même groupe est

$$[1+(-1)^{\theta}](-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{a-1}{2}}\psi(\alpha-\beta, a+b).$$

D'abord, des formules (A) et de ce que $\psi(x, y)$ est une fonction symétrique des deux variables x, y, on déduit

$$\psi(\alpha_1-\beta_1, a_1+b_1)=\psi(a+b, \alpha-\beta)=\psi(\alpha-\beta, a+b),$$

et, par conséquent, la somme des deux termes de Σ_1 qui correspondent aux deux solutions considérées est

$$\left[(-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{a-1}{2}}+(-1)^{\frac{\beta_1-1}{2}+\frac{\alpha_1-1}{2}}\right]\psi(\alpha-\beta, a+b).$$

D'ailleurs on déduit de l'équation (2) mise sous la forme (α), n° **24**,

$$m\equiv\frac{a+b}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\, 2),$$

et des formules I du n° **22**

$$\frac{\beta_1+a_1}{2}=\frac{\beta+a}{2}+\theta\left(\frac{a+b}{2l}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\equiv\frac{\beta+a}{2}+\theta \qquad (\mathrm{mod}\, 2).$$

On a donc

$$(-1)^{\frac{\beta_1-1}{2}+\frac{a_1-1}{2}}=(-1)^{\theta}(-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{a-1}{2}},$$

ce qui justifie l'expression énoncée ci-dessus.

De plus, comme l'un des deux nombres $(a+b)$ ou (a_1+b_1) est de la forme $4l+2$, nous supposerons que celle des deux solutions au moyen de laquelle on exprime la somme des deux termes vérifie la condition $a+b=4l+2$.

La somme S″ peut donc s'exprimer par la formule suivante

$$(13)\qquad \begin{cases} S''=2\Sigma_2[1+(-1)^{\theta}](-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{a-1}{2}}\psi(\alpha-\beta, a+b), \\ \theta=E\left(\frac{\beta}{\alpha-\beta}\right), \end{cases}$$

où l'on désigne par Σ_2 une somme dont les termes correspondent à celles des solutions de l'équation (2) dans lesquelles on a

$$\alpha > \beta \qquad \text{et} \qquad a + b \equiv 2 \qquad (\text{mod } 4).$$

30. L'expression cherchée de la somme S'' au moyen de la somme S_1 se déduit de la dernière formule en posant, comme au n° **25**,

$$(\mathrm{C}) \qquad a + b = 2d_1, \qquad \alpha - \beta = 2^{i+1} d_2,$$

ce qui réduit l'équation (2) à la suivante :

$$(9) \qquad m = d_1 \beta + 2^i d_2 a.$$

Au lieu de la formule (13), on aura

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} S'' &= 2\Sigma' [1 + (-1)^\theta] (-1)^{\frac{\beta-1}{2} + \frac{a-1}{2}} \psi(2^{i+1} d_2, 2d_1), \\ \theta &= \mathrm{E}\left(\frac{\beta}{2^{i+1} d_2}\right), \end{aligned} \right.$$

en désignant par Σ' une somme dont les termes correspondent à celles des solutions de l'équation (9) en nombres impairs et positifs d_1, d_2, α, β, qui vérifient la condition $a < 2d_1$.

Nous avons vu plus haut (n° **25**) que, pour chaque système de valeurs des nombres d_1, $2^i d_2$ propres à vérifier l'équation

$$(10) \qquad m = d_1 \delta_1 + 2^i d_2 \delta_2,$$

l'équation (9) n'admet qu'une seule solution qui vérifie la condition $a < 2d_1$, tandis que l'équation (10) admet toutes les solutions qui se déduisent des formules

$$\delta_2 = a + \lambda 2d_1, \qquad \delta_1 = \beta - \lambda 2^{i+1} d_2,$$

en donnant à λ les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \theta$. La somme des termes de S_1 qui correspondent à un même système de valeurs de d_1 et $2^i d_2$ est donc

$$\psi(2^{i+1} d_2, 2d_1) \Sigma (-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2} + \frac{\delta_2 - 1}{2}}.$$

Or on déduit des deux dernières formules

$$\frac{\delta_1 - 1}{2} + \frac{\delta_2 - 1}{2} \equiv \frac{\beta - 1}{2} + \frac{a - 1}{2} + \lambda.$$

On a donc

$$\Sigma(-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2} + \frac{\delta_2 - 1}{2}} = (-1)^{\frac{\beta - 1}{2} + \frac{a - 1}{2}} [1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^\theta].$$

La somme renfermée entre parenthèses se réduit à 1 ou à 0 suivant que θ est pair ou impair; elle est égale dans tous les cas à

$$\tfrac{1}{2}[1 + (-1)^\theta].$$

La somme S_1 peut donc s'exprimer par la formule

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\Sigma'[1 + (-1)^\theta](-1)^{\frac{\beta - 1}{2} - \frac{a - 1}{2}} \psi(2^{i+1} d_2, 2d_1),$$

dans laquelle Σ' désigne une somme dont les termes correspondent, comme dans la formule (14), aux solutions de l'équation (9), sous la condition $a < 2d_1$; ce qui justifie la relation énoncée

$$S' = 4S_1.$$

On a donc, entre les trois sommes considérées, la relation

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma(-1)^{\frac{\alpha - 1}{2} + \frac{b - 1}{2}} \psi(a - b, \alpha + \beta) \\ &\quad = \Sigma(-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \psi(0, 2d) + 4\Sigma(-1)^{\frac{\delta_1 - 1}{2} + \frac{\delta_2 - 1}{2}} \psi(2^{i+1} d_2, 2d_1). \end{aligned} \right.$$

51. On remplit les conditions imposées à la fonction $\psi(x, y)$ en prenant

$$\psi(x, y) = f(x) + f(y),$$

pourvu que l'on désigne par $f(x)$ une fonction paire de x. Le premier membre de la formule (15) devient alors

$$\Sigma(-1)^{\frac{\alpha - 1}{2} + \frac{b - 1}{2}} f(a - b) + \Sigma(-1)^{\frac{\alpha - 1}{2} + \frac{b - 1}{2}} f(\alpha + \beta).$$

Mais chacune de ces sommes reste invariable lorsqu'on y échange

entre elles les lettres grecques et les lettres latines correspondantes. En faisant cet échange dans la dernière somme et en ayant égard à la relation

$$(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{b-1}{2}}=(-1)^{\frac{\beta-1}{2}+\frac{a-1}{2}},$$

on peut remplacer cette seconde somme par la suivante

$$\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{b-1}{2}}f(a+b),$$

de sorte que la formule (15) devient

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{b-1}{2}}[f(a+b)+f(a-b)]\\ &\quad=\Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}[f(2d)+f(0)]\\ &\qquad+4\Sigma(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}+\frac{\delta_2-1}{2}}[f(2d_1)+f(2^{i+1}d_2)].\end{aligned}\right.$$

On peut prendre $f(x)=\cos tx$; on obtient ainsi la formule

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &2\Sigma\left[\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\cos at\,\Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}}\cos bt\right]\\ &\quad=\Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}(1+\cos 2dt)\\ &\qquad+4\Sigma\left[\Sigma(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}}\Sigma(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}}\cos 2d_1t\right]\\ &\qquad+4\Sigma\left[\Sigma(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}}\Sigma(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}}\cos(2^{i+1}d_2t\right].\end{aligned}\right.$$

La triple somme du premier membre se rapporte aux trois équations

$$2m=m'+m'',\qquad m'=a\alpha,\qquad m''=b\beta;$$

les deux sommes triples du second membre correspondent aux trois équations

$$m=m_1+2^im_2,\qquad m_1=d_1\delta_1,\qquad m_2=d_2\delta_2.$$

Les sommations relatives à ces équations étant séparées, on pourra

les effectuer pour chaque valeur de t. Ainsi, pour $t = 0$, on a la relation

$$\Sigma\rho(m')\rho(m'') = \Sigma\rho(m) + 4\Sigma\rho(m_1)\rho(m_2),$$

où l'on désigne par $\rho(m)$ le nombre des décompositions de $2m$ en sommes de deux carrés impairs.

Les formules établies dans ce Mémoire sont susceptibles d'un grand nombre d'applications. Je donnerai dans un prochain Mémoire la suite des applications aux formes quadratiques, par lesquelles j'ai terminé le Mémoire cité du 19 avril 1885 (*Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei*).

Sur les courbes cycliques de direction;

PAR M. G. HUMBERT.

Dans notre Mémoire sur le théorème d'Abel, publié dans le tome III (4e série) de ce Journal, nous avons énoncé, relativement aux courbes cycliques de direction, la proposition suivante [1] :

La somme des arcs interceptés sur une courbe cyclique de direction, à branches cycliques distinctes, par deux courbes quelconques de même degré, est égale à la somme des arcs interceptés par ces mêmes courbes sur les cercles qui osculent à l'infini les branches de la courbe primitive.

Pour démontrer ce théorème, nous avons admis qu'un *même* cercle réel osculait à l'infini deux branches conjuguées de la courbe primitive; mais, en général, une courbe cyclique n'admet pas de tels cercles biosculateurs, et le théorème précédent doit subir, pour s'appliquer à tous les cas, une légère modification.

Parmi les cercles qui ont pour centre un foyer singulier réel d'une courbe réelle, et qui touchent tous, en chacun des points cycliques I et J, une branche de cette courbe, il en est un qui oscule la branche correspondant au point I, et un autre, imaginaire conjugué du premier, qui oscule la branche correspondant au point J. Si ces deux

(1) Page 390; n° 54.

cercles coïncident, on est en présence d'un cercle biosculateur; s'il en est autrement, désignons par $R + R'i$ et $R - R'i$ leurs rayons, et appelons *cercle focal* le cercle, concentrique aux précédents, et de rayon R. On arrive alors sans grande difficulté, en appliquant les principes établis dans le Mémoire sur le théorème d'Abel, au résultat suivant :

La somme des arcs interceptés sur une courbe cyclique de direction réelle, à branches cycliques distinctes, par deux courbes quelconques de même degré, est égale à la somme des arcs interceptés par ces mêmes courbes sur les cercles focaux de la courbe primitive.

La même modification doit être introduite dans le théorème VI du n° **62**.

A cette occasion, nous compléterons les résultats que nous avons donnés, relativement aux courbes cycliques de direction à branches cycliques distinctes, et ne touchant pas la droite de l'infini, par les remarques suivantes :

Si l'on considère la somme algébrique des arcs interceptés sur une de ces courbes par les deux côtés d'un angle α, elle sera égale, d'après le théorème précédent, en appelant R_1, R_2, ... les rayons des cercles focaux, à $\alpha\Sigma R_1$, les rayons étant affectés de signes convenables, déterminés par le sens dans lequel sont décrits les cercles focaux. On voit que cette somme est indépendante des positions respectives de la courbe et de l'angle, et l'on généralise ainsi la propriété bien connue du cercle relative à la mesure des angles :

La somme des arcs interceptés sur une courbe cyclique de direction réelle, à branches cycliques distinctes, par les deux côtés d'un angle, est proportionnelle à la valeur de cet angle, et indépendante de sa position dans le plan.

La somme des arcs interceptés sur une courbe cyclique de direction par deux courbes asymptotiques étant toujours nulle (**50**), on voit également que :

La somme des arcs interceptés sur une courbe cyclique de direc-

tion réelle, à branches cycliques distinctes, par deux courbes quelconques de même degré, est indépendante de la position de la courbe cyclique par rapport aux deux courbes sécantes.

Car on peut remplacer chacune de ces dernières par le faisceau des droites menées d'un point parallèlement aux directions asymptotiques.

Ce théorème s'applique, en particulier, au cercle.

Sur les courbes algébriques planes rectifiables;

PAR M. G. HUMBERT.

1. Nous appellerons, à l'exemple de Serret, *courbe algébrique rectifiable* toute courbe dont l'arc peut être exprimé par une fonction algébrique des coordonnées; parmi les courbes rectifiables, on peut considérer en particulier celles dont l'arc est exprimable par une fonction rationnelle des coordonnées. Cela posé, les problèmes que nous aborderons dans ce travail sont les suivants :

I. *Déterminer toutes les courbes algébriques planes rectifiables, et trouver la forme de l'équation qui lie l'arc aux coordonnées.*

II. *Déterminer toutes les courbes algébriques planes, dont l'arc est une fonction rationnelle des coordonnées.*

Nous terminerons en donnant quelques exemples de courbes rectifiables, et en indiquant quelques propriétés relatives aux longueurs de l'arc sur ces courbes.

2. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique : supposons qu'il existe entre l'arc s, compté à partir d'un point fixe, et les coordonnées, x, y, de l'extrémité de l'arc, une relation algébrique, $F(s, x, y) = 0$.

Nous allons montrer que cette équation peut se ramener, dans tous les cas, au second degré par rapport à s.

Cherchons en effet combien de valeurs peut avoir la fonction s quand

on donne à x et y les valeurs qui correspondent à un point de la courbe $f = 0$.

Représentons sur un plan la variable x, selon le mode ordinaire de représentation des quantités imaginaires; soient x_0 et x_1 deux points donnés de ce plan, y_0 et y_1 deux valeurs de y correspondant respectivement à ces points par la relation $f(x, y) = 0$.

Tous les chemins allant de x_0 à x_1, et tels, qu'en partant de x_0 avec la valeur y_0 de la fonction y on arrive en x_1 avec la valeur y_1, peuvent, comme on sait, se ramener à un chemin déterminé L, allant de x_0 en x_1, précédé d'un nombre quelconque de cycles, c'est-à-dire de contours fermés, allant de x_0 à x_0, et tels, qu'en partant de ce point avec la valeur y_0 de y, on y revienne avec la même valeur.

Chercher les valeurs que peut avoir la fonction s pour des valeurs données, x_1 et y_1, des coordonnées d'un point de la courbe $f = 0$, c'est chercher les valeurs que prend cette fonction au point x_1, quand on part du point x_0 avec une valeur initiale déterminée s_0 et que l'on décrit la ligne L, précédée d'un nombre quelconque des cycles définis plus haut.

Or on a

$$ds = \frac{dx}{f'_y}\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}.$$

Soit s_1 la valeur de l'intégrale $\int ds$, suivant la ligne L, quand on part de x_0 avec la valeur y_0 de y et un signe déterminé du radical qui figure dans l'expression de ds.

Évaluons maintenant cette intégrale le long des différents cycles considérés.

Ces cycles se divisent en deux catégories : en décrivant un cycle de la première catégorie, on revient au point x_0 avec la valeur initiale du radical $\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}$; un cycle de seconde catégorie, au contraire, ramène la valeur de signe contraire de ce radical.

Cela posé, je dis que la valeur de l'intégrale

$$\int dx \frac{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}{f'_y}$$

est nulle le long de tout cycle de première catégorie : si elle était

égale en effet à une quantité σ, différente de zéro, l'intégrale, en supposant qu'on décrive m fois le cycle considéré, puis la ligne L, prendrait la valeur $m\sigma + s_1$, et l'arc aurait, pour des valeurs données x_1, y_1 des coordonnées, les valeurs en nombre infini comprises dans la formule $s_0 + s_1 + m\sigma$. L'arc ne serait donc pas fonction algébrique de x, y, contrairement à l'hypothèse.

Soit, en second lieu, $2\omega_1$ la valeur de l'intégrale $\int ds$ le long d'un cycle de deuxième catégorie : deux cycles de cette catégorie décrits successivement constituent évidemment un cycle de première catégorie, et l'intégrale correspondante est nulle; de plus, $2\omega_1$ est la valeur commune de l'intégrale $\int ds$ le long de tous les cycles de la seconde espèce.

Si donc l'on décrit un nombre quelconque de cycles, puis la ligne L, on n'aura, pour la valeur de l'intégrale $\int ds$ le long de ces chemins, que deux expressions différentes qui seront s_1 et $2\omega_1 - s_1$: on trouvera s_1 si l'on a décrit un nombre pair de cycles de la deuxième catégorie et $2\omega_1 - s_1$ si l'on a décrit un nombre impair de ces cycles.

En d'autres termes, l'arc s n'aura, pour des valeurs données de x et y, que deux valeurs, dont la somme ne dépend pas des coordonnées x, y; et par suite l'équation algébrique à laquelle satisfait s sera nécessairement de la forme

$$s^2 - 2\omega s + R = 0,$$

R désignant une fonction rationnelle de x, y, et ω une constante, qui dépend des coordonnées du point origine des arcs.

3. On peut, dans une certaine mesure, préciser la forme de la fonction $R(x, y)$: on tire en effet de la relation précédente

$$s - \omega = \sqrt{\omega^2 - R},$$

d'où

$$\frac{ds}{dx} = -\tfrac{1}{2}(\omega^2 - R)^{-\frac{1}{2}} \frac{R'_x f'_y - R'_y f'_x}{f'_y}.$$

En égalant le second membre de cette relation à $\frac{1}{f'_y}(f'^2_x + f'^2_y)^{\frac{1}{2}}$, on

voit que $\sqrt{\omega^2 - R}$ est de la forme

$$\sqrt{\omega^2 - R} = P\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2},$$

P étant une fonction rationnelle de x, y, et l'équation en s devient

$$(s - \omega)^2 = P^2(f_x'^2 + f_y'^2).$$

4. De cette équation on déduit que la courbe $f = 0$ est la développée d'une courbe algébrique, et que ces deux courbes se correspondent rationnellement point par point.

Portons en effet, sur la tangente au point x, y de la courbe $f = 0$, dans le sens de l'accroissement de s, une longueur à $\omega - s$: l'extrémité de cette tangente décrira une courbe, dont la courbe $f = 0$ est la développée. Soit ξ, η le point de cette courbe qui correspond ainsi au point x, y : on aura

$$\xi = x + (\omega - s)\frac{f_y'}{\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}} = x - Pf_y',$$

$$\eta = y + (\omega - s)\frac{f_x'}{-\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}} = y + Pf_x';$$

ξ et η sont donc des fonctions rationnelles de x, y et la courbe décrite par le point ξ, η est algébrique. Inversement, on sait, par la théorie générale des courbes, que x, y, qui sont les coordonnées du centre de courbure de la développante au point ξ, η, sont fonctions rationnelles de ξ, η.

La proposition est donc démontrée. Il est clair d'ailleurs que l'arc de la développée d'une courbe algébrique est une fonction algébrique des coordonnées de ses extrémités, et l'on peut, par conséquent, énoncer le théorème suivant, dont la première partie était évidente :

Toute courbe algébrique rectifiable est la développée d'une courbe algébrique, et réciproquement.

L'arc d'une courbe algébrique rectifiable, $f(x, y) = 0$, est donné par une expression de la forme

$$s = \omega + P\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2},$$

où x, y désignent les coordonnées de l'extrémité de l'arc; ω une constante qui dépend du choix du point origine des arcs, et P *une fonction rationnelle de x, y.*

5. La forme de la relation qui lie l'arc aux coordonnées permet de déterminer immédiatement celles des courbes rectifiables pour lesquelles l'arc est une *fonction rationnelle* des coordonnées : si en effet $f(x, y) = 0$ est l'équation d'une courbe rectifiable, il faut et il suffit, pour que l'expression de l'arc soit rationnelle, que le radical $\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}$ soit égal, en chaque point de la courbe, à une fonction rationnelle, $Q(x, y)$.

Cette propriété caractérise les courbes dites *de direction*, que Laguerre a introduites dans la Géométrie, et que nous avons nous-même étudiées, au point de vue des propriétés de leurs arcs, dans un travail récent [1]. Ces courbes sont celles dont l'équation, en coordonnées tangentielles, peut se mettre sous la forme

$$(u^2 + v^2)\,F^2(u, v) - \varphi^2(u, v) = 0,$$

F et φ étant des polynômes entiers en u, v.

Les courbes que nous cherchons sont donc les développées de direction des courbes algébriques.

Or nous allons montrer que, si la développée d'une courbe algébrique est de direction, cette courbe est elle-même de direction, et, inversement, que la développée d'une courbe de direction est généralement une courbe de direction.

6. Pour démontrer la première proposition, considérons une courbe de direction $f(x, y) = 0$, qui soit la développée d'une courbe algébrique : d'après ce qui précède, l'arc de la courbe $f = 0$ sera exprimé par une fonction rationnelle $s(x, y)$ des coordonnées.

Une quelconque des courbes qui ont pour développée $f = 0$ s'obtiendra en portant sur la tangente à la courbe $f(x, y) = 0$, au poin x, y qui correspond à la valeur s de l'arc, une longueur égale à $a - s$,

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. III; 1887.

dans le sens de l'accroissement de s : a désigne une constante, quelconque d'ailleurs.

Soient ξ, η les coordonnées du point ainsi obtenu, qui décrira une courbe algébrique $F(\xi, \eta) = 0$, dont $f = 0$ sera la développée : les coordonnées x, y du centre de courbure de $F = 0$ au point ξ, η seront fonctions rationnelles de ξ, η.

Le rayon de courbure R de la courbe $F = 0$ au point ξ, η sera égal à $a - s$, c'est-à-dire à une fonction rationnelle de x, y et par suite de ξ, η.

On aura ainsi

$$[F_\xi^2 + F_\eta^2]^{\frac{3}{2}} = \text{fonction rationnelle de } \xi, \eta,$$

ce qui exprime que la courbe $F(\xi, \eta) = 0$ est de direction. Ainsi :

Quand la développée d'une courbe algébrique est de direction, cette courbe est elle-même de direction.

7. Arrivons maintenant à la deuxième proposition, énoncée pour la première fois par Laguerre : la développée $f(x, y) = 0$ d'une courbe de direction $F(\xi, \eta) = 0$ est elle-même de direction.

Soient x, y les coordonnées du centre de courbure de la courbe $F = 0$, au point ξ, η : deux cas sont à distinguer, selon qu'au point x, y correspond ou non un *seul* point ξ, η.

Dans le premier cas, les normales à la courbe $F(\xi, \eta) = 0$ ne coupent orthogonalement cette courbe qu'en un point; dans le second cas, elles la coupent orthogonalement en deux points au moins.

La courbe $F = 0$ étant de direction, le rayon de courbure au point ξ, η est une fonction rationnelle de ξ, η; et, par suite, si l'on se trouve placé dans le premier cas, de x, y. La différentielle de ce rayon de courbure étant égale à celle de l'arc s de la courbe $f = 0$, il en résulte que la différentielle de l'arc de cette courbe sera égale à dx multiplié par une fonction rationnelle de x, y. En d'autres termes, la courbe $f = 0$ est de direction.

La démonstration précédente ne s'applique pas au second cas; nous allons faire voir que le théorème de Laguerre n'est pas lui-même

applicable à ce cas, c'est-à-dire que la développée d'une courbe de direction coupée orthogonalement en deux points par chacune de ses normales n'est pas une courbe de direction.

Il est nécessaire pour cela d'entrer dans quelques détails sur la théorie des courbes parallèles, c'est-à-dire des courbes qui ont même développée.

8. Soit $f(x, y) = 0$ la développée d'une courbe algébrique : pour obtenir une quelconque des courbes dont elle est la développée, il faut, comme on l'a déjà fait observer, porter sur la tangente, au point x, y correspondant à la valeur s de l'arc, une longueur $a - s$, dans le sens de l'accroissement positif de s. Soient ξ, η les coordonnées du point ainsi obtenu : on aura, en gardant les notations des n^{os} **3** et **4**,

$$\begin{aligned}
\xi &= x + (a - s)\frac{f'_y}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}} \\
&= x + \left(a - \omega - \mathrm{P}\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}\right)\frac{f'_y}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}, \\
\eta &= y + (a - s)\frac{f'_x}{-\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}} \\
&= y + \left(a - \omega - \mathrm{P}\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}\right)\frac{f'_x}{-\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\xi &= x - \mathrm{P}f'_y + (a - \omega)\frac{f'_y}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}, \\
\eta &= y + \mathrm{P}f'_x + (a - \omega)\frac{f'_x}{-\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}.
\end{aligned}$$

On peut, dans les seconds membres, prendre pour le radical des signes quelconques, à condition toutefois que le quotient des fonctions $\eta - y - \mathrm{P}f'_x$ et $\xi - x + \mathrm{P}f'_y$ soit égal au coefficient angulaire de la tangente à la courbe $f = 0$, c'est-à-dire à $-\frac{f'_x}{f'_y}$.

Il en résulte qu'à un point x, y correspondent deux points ξ, η équidistants du point ξ_1, η_1, dont les coordonnées sont

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= x - \mathrm{P}f'_y, \\
\eta_1 &= y + \mathrm{P}f'_x
\end{aligned}$$

et qui est également sur la tangente à $f = 0$ au point x, y. La distance au point ξ_1, η_1 d'un des points ξ, η est d'ailleurs égale à $(a - \omega)$, c'est-à-dire à une constante.

Si nous appelons *courbe simple* une courbe qui n'est coupée orthogonalement par ses normales qu'en un point, *courbe complexe* une courbe coupée orthogonalement par ses normales en plus d'un point, on voit que le point ξ_1, η_1 décrit une courbe simple, et les points ξ, η une courbe complexe parallèle à la première.

Inversement, toute courbe simple ou complexe peut être obtenue de cette manière à l'aide de sa développée.

Il résulte de là que :

Une courbe algébrique indécomposable ne peut être coupée orthogonalement par ses normales en plus de deux points (¹).

Une courbe algébrique indécomposable, coupée orthogonalement par toutes ses normales en deux points, s'obtient en portant sur les normales à une courbe simple, de part et d'autre de leur pied, une longueur constante.

On peut démontrer que toute courbe parallèle à une courbe algébrique est une courbe de direction : si la courbe primitive n'est pas elle-même de direction, la courbe parallèle se compose de deux branches parallèles, algébriquement inséparables, et se trouve ainsi coupée orthogonalement en deux points par toutes ses normales; si la courbe primitive est de direction, la courbe parallèle se décompose en deux courbes parallèles distinctes, qui ne sont coupées orthogonalement par leurs normales qu'en un seul point. Les démonstrations de ces théorèmes sont données dans le *Traité de Géométrie* de Salmon (*Courbes planes*) (²), appliquées aux courbes dont l'équation tangentielle est de la forme $(u^2 + v^2) F^2(u, v) - \varphi^2(u, v) = 0$, c'est-à-dire précisément aux courbes que Laguerre a appelées depuis *courbes de direction*.

(¹) Il n'est pas sans intérêt de faire observer qu'un théorème analogue n'existe pas pour les courbes algébriques sphériques et les grands cercles normaux.

(²) Trad. O. Chemin, pages 150 et suiv.

En combinant tous ces résultats, on arrive, pour notre objet, aux conclusions suivantes :

La développée d'une courbe de direction simple est une courbe de direction.

Toute courbe complexe est une courbe de direction.

La développée d'une courbe complexe n'est jamais de direction.

Cette dernière proposition se démontre en observant que, si la développée d'une courbe complexe était de direction, il en serait de même, d'après le théorème du n° **6**, de la courbe simple à laquelle la courbe complexe est parallèle; cette dernière courbe serait alors décomposable en deux courbes simples.

9. Nous avons maintenant démontré cette proposition :

Théorème. — *Les courbes algébriques planes, dont l'arc peut être exprimé par une fonction rationnelle des coordonnées, sont les développées des courbes algébriques simples de direction.*

10. On peut donner à ce résultat une forme plus élégante. Laguerre a démontré, en effet, que toute courbe de direction peut être, d'une infinité de manières, considérée comme une anticaustique par réflexion d'une courbe algébrique, les rayons incidents étant parallèles, et, réciproquement, que toute anticaustique d'une courbe algébrique est une courbe de direction (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. II, p. 29 et suivantes; 1883).

Il est nécessaire, toutefois, de compléter ce théorème en introduisant la distinction des courbes de direction simples et complexes.

Rappelons d'abord la construction des anticaustiques par réflexion d'une courbe C.

Soient

D une droite perpendiculaire à la direction des rayons lumineux;
m un point de C;
mx le rayon incident;
mx' le rayon réfléchi;
mt la tangente en m.

Si, par le point de rencontre de mt et de D, on mène la droite Δ, symétrique de mt par rapport à D, l'enveloppe de cette droite est une anticaustique A, à laquelle le rayon réfléchi est normal au point où il rencontre Δ.

Le rayon réfléchi n'est ainsi normal à A qu'en un point : pour qu'il en fût autrement, il faudrait qu'un même rayon réfléchi pût correspondre à deux points m et m' de C, ou, en d'autres termes, que les points de C fussent associés deux à deux, m et m', de façon que les rayons incidents, tombant en m et m', se réfléchissent tous deux suivant mm'.

Si cette condition est remplie, on voit immédiatement que les normales, et par suite les tangentes à C en m et m', sont rectangulaires, et que la droite qui joint le point de concours o de ces tangentes au milieu de mm' est parallèle à la direction des rayons incidents : il résulte de là, par l'application d'un théorème élémentaire de Cinématique, que la normale, au lieu du point o, est parallèle aux rayons incidents, c'est-à-dire que le point o décrit une droite normale à ces rayons.

Cette discussion montre que les anticaustiques par réflexion des courbes algébriques, pour des rayons parallèles, sont des courbes simples, qu'on sait d'ailleurs être de direction; il n'y a qu'un cas d'exception, celui où la courbe réfléchissante est telle qu'on puisse lui mener deux tangentes rectangulaires par tous les points d'une droite normale aux rayons incidents : les anticaustiques sont alors des courbes complexes, une seule est une courbe simple, non de direction.

11. On déduit de là le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les courbes planes algébriques, dont l'arc peut être exprimé par une fonction rationnelle des coordonnées, sont les caustiques par réflexion de courbes algébriques, les rayons incidents étant parallèles, et réciproquement.*

Toutefois, si la courbe réfléchissante est telle qu'on puisse lui mener deux tangentes rectangulaires de tous les points d'une droite normale aux rayons incidents, la caustique aura son arc exprimable algébriquement, mais non rationnellement.

Si l'on observe que, d'après un théorème bien connu dû à Quételet, la caustique par réflexion d'une courbe algébrique, les rayons incidents étant concourants, est la développée d'une courbe algébrique, qui est arbitraire, si la courbe réfléchissante l'est elle-même, on voit que :

Les courbes planes algébriques, dont l'arc peut être exprimé par une fonction algébrique des coordonnées, sont les caustiques par réflexion des courbes algébriques, les rayons incidents étant concourants, et réciproquement.

12. Nous allons donner maintenant quelques exemples de courbes dont l'arc est une fonction rationnelle des coordonnées; nous insisterons sur le cas, particulièrement intéressant, des épicycloïdes.

Exemple I. — *Caustique d'un cercle.* — La caustique par réflexion d'un cercle, les rayons incidents étant parallèles, est, comme on sait, une épicycloïde engendrée par un point d'un cercle roulant sur un cercle de rayon double.

Son équation peut se mettre sous la forme

$$4(x^2+y^2)-a^2=3a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}. \tag{1}$$

On a, pour l'arc s, l'expression

$$s=3a^{\frac{2}{3}}\frac{x}{a^{\frac{2}{3}}+2y^{\frac{2}{3}}}+\text{const.}$$

ou, d'après (1),

$$s=\frac{9a^2x}{4(x^2+y^2)+2a^2}+\text{const.}$$

On a donc bien une expression rationnelle, comme on devait s'y attendre.

13. Exemple II. — Un autre exemple de courbe rectifiable est fourni par l'*hypocycloïde à quatre rebroussements,* engendrée par un point d'un cercle roulant intérieurement sur un cercle de rayon quadruple.

Cette courbe, bien connue, a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$$

on trouve, pour l'arc,

$$s = \frac{3a}{2}\,\frac{2x^2 - y^2 + a^2}{x^2 + y^2 - 2a^2} + \text{const.}$$

La courbe est donc une caustique par réflexion de courbe algébrique pour des rayons parallèles; nous allons faire voir qu'on peut la considérer comme la caustique d'une hypocycloïde à trois rebroussements.

En effet, l'axe des x passant par un des trois points de rebroussement de cette dernière courbe, et l'origine étant au centre du cercle fixe, on a, pour les équations de la tangente et de la normale en un point de l'hypocycloïde à trois rebroussements (Salmon, *Courbes planes*),

$$x \sin \tfrac{1}{2}\varphi + y \cos \tfrac{1}{2}\varphi = -\ k \sin \tfrac{3}{2}\varphi,$$
$$x \cos \tfrac{1}{2}\varphi - y \sin \tfrac{1}{2}\varphi = -\ 3k \cos \tfrac{3}{2}\varphi,$$

k étant une constante et φ un paramètre variable. Si les rayons lumineux sont parallèles à Ox, le rayon réfléchi au point d'intersection des deux droites précédentes aura pour équation

$$x \sin\varphi + y \cos\varphi = -\ 3k \cos \tfrac{3}{2}\varphi \sin \frac{\varphi}{2} - k \sin \tfrac{3}{2}\varphi \cos \frac{\varphi}{2}$$

ou

$$x \sin\varphi + y \cos\varphi = -\ 2k \sin 2\varphi + k \sin\varphi.$$

En transportant l'origine des coordonnées au point $y = 0$, $x = k$, cette équation devient

$$x' \sin\varphi + y' \cos\varphi = -\ 2k \sin 2\varphi.$$

C'est celle d'une droite dont la partie comprise entre les axes a une longueur constante égale à $4k$: l'enveloppe de cette droite, c'est-à-dire

la caustique cherchée, est donc une hypocycloïde à quatre rebroussements. Ainsi :

La caustique par réflexion d'une hypocycloïde à trois rebroussements, les rayons lumineux étant parallèles à un des axes de symétrie de la courbe, est une hypocycloïde à quatre rebroussements.

De plus, on déduit sans difficulté des formules qui précèdent que les deux hypocycloïdes peuvent être engendrées de la manière suivante :

Soient trois cercles, de rayons a, $3a$, $4a$, tangents entre eux intérieurement en un point m. Si l'on fait rouler successivement le premier cercle à l'intérieur de chacun des deux autres, le point m décrit deux hypocycloïdes, dont la seconde est la caustique par réflexion de la première, pour les rayons lumineux parallèles à la ligne des centres des cercles fixes.

14. Exemple III. — *Épicycloïdes algébriques.* — On peut se demander, en présence des résultats qu'on vient d'obtenir, si, dans la famille des épicycloïdes ou des hypocycloïdes algébriques, il n'existe pas d'autres courbes ayant leur arc exprimable rationnellement en fonction des coordonnées.

En désignant par a le rayon du cercle mobile, par n le rapport de ce rayon au rayon du cercle fixe, on a, pour les coordonnées des points d'une épicycloïde,

$$\frac{x}{a} = \frac{n+1}{n}\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi,$$

$$\frac{y}{a} = \frac{n+1}{n}\sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi,$$

d'où l'on tire

$$\frac{s}{a} = -4(n+1)\cos\frac{\varphi}{2} + \text{const.}$$

Il ne paraît pas facile de déterminer, d'après ces formules, dans quels

cas s est fonction rationnelle de x, y; mais on peut aborder la question d'une autre manière.

Dans le cas où n est une fraction, on déduit des relations précédentes que s est une fonction algébrique de x, y, c'est-à-dire que toute épicycloïde algébrique est une courbe rectifiable; par conséquent, les épicycloïdes dont l'arc est rationnel sont les épicycloïdes de direction.

Pour trouver toutes ces courbes, observons que, l'équation tangentielle des courbes de direction étant de la forme

$$(u^2 + v^2)\,F(u, v) - \varphi^2(u, v) = 0,$$

les réciproques de ces courbes, par rapport à un cercle ayant l'origine pour centre, auront une équation de la forme

$$(x^2 + y^2)\,F^2(x, y) - \varphi^2(x, y) = 0.$$

En d'autres termes, pour qu'une courbe soit de direction, il faut et il suffit que la distance à l'origine d'un point quelconque de sa réciproque, prise par rapport à un cercle ayant l'origine pour centre, soit une fonction rationnelle des coordonnées de ce point. Cette propriété caractérise les courbes que M. Halphen appelle de *première catégorie*, c'est-à dire les courbes dont l'équation en coordonnées polaires est changée quand on remplace r par $-r$ et θ par $\theta + \pi$.

D'un autre côté, la réciproque d'une épicycloïde a pour équation polaire, le centre du cercle fixe étant pris pour origine,

$$(2) \qquad r \cos \frac{1}{2n+1}\theta = k.$$

M. Halphen a fait remarquer que les courbes, dont l'équation est

$$\frac{1}{r} = \cos \frac{p}{q}\theta,$$

sont de première catégorie seulement si l'un des nombres, supposés

premiers entre eux, p et q, est pair. Appliquons ce résultat à la courbe (2); soit $n = \frac{\lambda}{\mu}$; on aura alors

$$\frac{p}{q} = \frac{\mu}{2\lambda + \mu}.$$

Deux cas sont à distinguer : si μ est impair, μ et $2\lambda + \mu$ sont premiers entre eux, en supposant que μ et λ le soient; de plus, ces deux nombres sont impairs, et la courbe n'est pas de première catégorie; si μ est pair, soit $\mu = 2\mu'$, on aura

$$\frac{\mu}{2\lambda + \mu} = \frac{\mu'}{\lambda + \mu'};$$

les deux nombres μ' et $\lambda + \mu'$ seront premiers entre eux, et la courbe sera de première catégorie si l'un de ces nombres est pair, c'est-à-dire si leur somme est impaire. Or cette somme, égale à $\lambda + 2\mu'$, a la parité de λ; il en résulte que n sera de la forme $\frac{2\lambda' + 1}{2\mu'}$, et, par suite :

Les épicycloïdes algébriques, dont l'arc est une fonction rationnelle des coordonnées, sont celles qu'on obtient en prenant, pour l'expression du rapport du rayon du cercle mobile au rayon du cercle fixe, une fraction irréductible de dénominateur pair.

Les deux courbes trouvées plus haut rentrent bien dans cette catégorie, puisque l'on a, dans le cas de l'exemple I,

$$n = \tfrac{1}{2},$$

et, dans celui de l'exemple II,

$$n = -\tfrac{1}{4}.$$

15. Exemple IV. — *Caustique par réflexion de la parabole.* — La caustique par réflexion d'une parabole, en supposant les rayons

lumineux perpendiculaires à l'axe de la conique, est la développée de la courbe de direction remarquable que Laguerre a nommée *hypercycle cubique;* son équation peut, comme on le sait, se mettre sous la forme

$$(x + 4m)^3 = 27m(x^2 + y^2),$$

en supposant que l'équation de la parabole soit

$$y^2 = 4(mx + m^2).$$

La courbe caustique est donc une cubique qui a, comme on le voit sans difficulté, un point double pour $y = 0$, $x = 8m$. C'est, après la ligne droite, la courbe de moindre degré dont l'arc est exprimable en fonction rationnelle des coordonnées; il est clair, en effet, qu'aucune conique ne remplit cette condition, et parmi les cubiques il n'y a, comme nous l'avons montré dans un autre Travail, que deux espèces de courbes de direction. Les cubiques de la première espèce ont leur arc exprimable par une intégrale elliptique; celles de la seconde sont précisément celles que nous venons de rencontrer [1].

On peut mettre sans difficulté les coordonnées des points de la caustique de parabole sous la forme suivante :

$$x = \lambda\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + \alpha, \qquad y = \lambda t^2 + \beta,$$

t étant un paramètre variable, et λ, α, β des constantes; d'où

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \lambda^2(t^2 + 1)^2\,dt$$

et

$$s = \lambda \int (t^2 + 1)\,dt;$$

s est donc une fonction rationnelle de t, et par suite de x, y, comme on le savait d'avance.

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. III; 1887.

16. Il est intéressant, dans le cas où l'arc d'une courbe algébrique est une fonction rationnelle des coordonnées, de déterminer la forme de cette fonction.

M. Poincaré a démontré que les coordonnées des points d'une courbe algébrique, $f(x, y) = 0$, peuvent s'exprimer en fonction fuchsienne d'un paramètre t; il en résulte que l'arc, dans le cas où il est fonction rationnelle des coordonnées, sera lui-même une fonction fuchsienne de t.

Si, au lieu des coordonnées cartésiennes x et y, on introduit des coordonnées homogènes en posant $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, on pourra considérer x_1, x_2, x_3 comme des fonctions thêtafuchsiennes de t, de même degré μ, holomorphes à l'intérieur du cercle fondamental, et ayant k zéros communs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Si l'arc s est une fonction fuchsienne de t, la fonction $s(t)\, x_3(t)$ sera une fonction thêtafuchsienne de degré μ : je dis qu'elle est holomorphe dans le cercle fondamental.

On a en effet

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{x_3 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dx_3}{dt}}{x_3^2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_3}{dt}}{x_3^2}\right)^2.$$

Cette expression montre que les infinis de $\frac{ds}{dt}$, ne peuvent être que les zéros de $x_3(t)$, non communs aux trois fonctions x_1, x_2, x_3, et que, si β est un zéro d'ordre h de $x_3(t)$, il est, pour $\frac{ds}{dt}$, un infini d'ordre $h+1$, au plus. Par conséquent, les infinis de $s(t)$ ne peuvent être que les zéros de $x_3(t)$, les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ exceptées; et un zéro d'ordre h de $x_3(t)$ est pour $s(t)$ un infini d'ordre h, au plus. La fonction $s(t)\, x_3(t)$ est donc une fonction thêtafuchsienne holomorphe dans le cercle fondamental; elle est de degré μ, et de plus elle s'annule pour $t = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Or nous avons démontré dans un travail antérieur [1] que les zéros de toute fonction de cette nature, les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ exceptées, sont

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. II.

les arguments de points de la courbe $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ situés, avec les points où cette courbe est coupée par une courbe adjointe quelconque $P = 0$ de degré $n - 3$, sur une courbe adjointe $C = 0$, de degré $n - 2$, n désignant l'ordre de la courbe $f = 0$.

Il résulte de là que la fonction

$$\frac{C[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]}{P[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]},$$

qui évidemment est une fonction thêtafuchsienne holomorphe de degré μ, s'annulant pour $t = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, a les mêmes zéros que la fonction $s(t)\, x_3(t)$; ces deux fonctions sont donc identiques, à un facteur constant près, et l'on a

$$s x_3 = A \frac{C}{P}.$$

En revenant aux coordonnées cartésiennes, on trouve ainsi, pour l'expression de l'arc de la courbe $f(x, y) = 0$,

$$s = \frac{C(x, y)}{P(x, y)},$$

$P = 0$ étant l'équation d'une courbe de degré $n - 3$ adjointe à la courbe $f = 0$, et que l'on peut choisir arbitrairement; $C = 0$ étant l'équation d'une courbe adjointe d'ordre $n - 2$, passant par les points où la courbe $P = 0$ rencontre la courbe $f = 0$.

C'est la forme cherchée de l'expression de l'arc.

On voit aisément que, dans le cas des courbes unicursales, auquel le raisonnement précédent n'est pas applicable, on a pour s une expression analogue, seulement les degrés respectifs de P et C sont $n - 2$ et $n - 1$.

17. Les résultats précédents montrent que l'arc s, dans le cas où il s'exprime rationnellement, ne peut devenir infini que pour les points à l'infini de la courbe, car les arguments de ces points sont les seuls qui annulent x_3. De plus, la fonction $s x_3$ ne devient plus infinie en ces points.

Si donc on applique à la fonction s un théorème que nous avons démontré dans notre Mémoire sur le théorème d'Abel, on arrive sans difficulté au résultat suivant, qui ne serait pas vrai pour une courbe de direction quelconque.

Soit C *une courbe algébrique dont l'arc est une fonction rationnelle des coordonnées : la somme algébrique des arcs interceptés sur* C *par deux courbes quelconques de même degré, appartenant à un même faisceau ponctuel, est toujours nulle, si chacune des asymptotes de la courbe* C *est asymptote à l'une des courbes du faisceau.*

Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (seconde Partie);

PAR H. HUGONIOT [1].

1. Dans la première Partie de ce Mémoire, j'ai étudié la propagation du mouvement dans un fluide indéfini en partant des équations de l'Hydrodynamique sous la forme qui leur a été donnée par Euler. Ces équations sont du premier ordre : c'est pourquoi on leur donne presque toujours la préférence sur celles qui ont été établies par Lagrange dans la Mécanique analytique, et qui sont du second ordre.

Les équations d'Euler présentent cependant un grave inconvénient : elles ne permettent en aucune façon de suivre la molécule fluide dans son mouvement, de sorte que, si l'on excepte les cas de régime permanent, leur intégration ne pourrait donner, sur la nature du mouvement, que des renseignements insuffisants.

En admettant que, dans le fluide considéré, il existait, entre la pression et la densité, une relation de la forme $\rho = F(p)$, on a trouvé, dans la première Partie de ce travail, pour expression analytique de la

[1] Ce Mémoire posthume, retrouvé dans les papiers laissés par M. Hugoniot, et dont la première Partie a été insérée dans le Volume précédent (t. III, p. 477), nous a été communiqué par M. Liouville. M. Léauté a bien voulu nous signaler l'erreur que nous avions commise en lui attribuant cette communication.

vitesse de propagation, la formule

$$\frac{dn}{dt} = N \pm \sqrt{\frac{1}{F'(p)}},$$

où N désigne la projection de la vitesse du fluide sur la normale à la surface de l'onde.

Mais il a été nécessaire de supposer que la fonction $F(p)$ était la même pour tous les points du fluide, de sorte que l'on n'a pu traiter que le cas particulier où le fluide est homogène à l'instant initial. Quand il en est autrement, la fonction F dépend des coordonnées initiales; mais elle n'est pas déterminée pour chaque système de valeurs de x, y, z, de sorte que, l'équation $\rho = F(p)$ ne pouvant être jointe aux quatre premières équations de l'Hydrodynamique, le nombre des fonctions inconnues se trouve supérieur à celui des équations.

Les équations de Lagrange font disparaître cette restriction; elles permettent ainsi de généraliser les résultats obtenus dans la première Partie du Mémoire; enfin elles conduisent à envisager d'une manière nouvelle le phénomène de la propagation du mouvement.

2. Je vais d'abord démontrer les équations de Lagrange en employant une méthode plus directe que celle dont leur auteur a fait usage.

Soient

x, y, z les coordonnées initiales d'une molécule du fluide;
D la densité initiale qui est fonction de x, y, z;
u, v, w les coordonnées de la molécule à l'instant t;
ρ la pression et p la densité à cet instant.

Il s'agit de déterminer les cinq fonctions inconnues u, v, w, ρ et p de x, y, z et t.

On obtient une première équation, dite *équation de continuité*, en exprimant que la densité d'un élément de masse est en raison inverse de son volume.

Considérons le parallélépipède élémentaire dont les arêtes sont, à l'instant initial, représentées par dx, dy, dz : le sommet ayant pour coor-

données initiales x, y, z est venu, à l'instant t, au point u, v, w; les trois sommets contigus ont alors pour coordonnées

$$\begin{array}{lll} u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx, & v + \frac{\partial v}{\partial x}\,dx, & w + \frac{\partial w}{\partial x}\,dx, \\ u + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy, & v + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy, & w + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy, \\ u + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz, & v + \frac{\partial v}{\partial z}\,dz, & w + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz. \end{array}$$

D'après un théorème bien connu sur la déformation d'un système de points, l'élément de volume qui affectait, à l'instant initial, la forme d'un parallélépipède constitue encore un parallélépipède à l'instant t. Son volume, primitivement égal à dx, dy, dz, est à l'instant t représenté par

$$dx\,dy\,dz \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \theta\,dx\,dy\,dz,$$

en représentant par θ le déterminant. Exprimant que la densité est en raison inverse du volume, on a

$$(1) \qquad \rho = \frac{D}{\theta},$$

ce qui constitue l'équation de continuité.

3. La conductibilité du fluide pour la chaleur est regardée comme négligeable; on suppose en outre que la vitesse d'une molécule ne subit jamais de variations brusques. Dans ces conditions, chaque élément de volume se détend en satisfaisant à la loi adiabatique, et il existe, entre sa pression et sa densité, une relation de la forme

$$(2) \qquad \rho = F(p),$$

la fonction F pouvant d'ailleurs varier avec x, y, z. Les équations (1)

et (2), jointes aux trois équations du mouvement que l'on va déterminer plus loin, définissent les cinq fonctions inconnues ρ, p, u, v, w.

4. Lorsqu'à l'instant t on passe du point dont les coordonnées sont u, v, w au point dont les coordonnées sont $u + du$, $v + dv$, $w + dw$, les quantités x, y, z éprouvent des accroissements dx, dy, dz, liés aux précédents par les équations

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy + \frac{\partial v}{\partial z}\,dz,$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz.$$

Le déterminant des seconds membres est précisément θ, de sorte que, en résolvant par rapport à dx, dy, dz, on a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \theta\,dx &= du\,\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial x}} + dv\,\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial x}} + dw\,\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial x}},\\ \theta\,dy &= du\,\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial y}} + dv\,\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial y}} + dw\,\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial y}},\\ \theta\,dz &= du\,\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial z}} + dv\,\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial z}} + dw\,\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial z}}, \end{aligned}\right.$$

formules dont on trouvera plus loin l'application.

5. Considérons, à l'instant t, le parallélépipède élémentaire ayant son sommet au point u, v, w et dont les arêtes sont égales à du, dv, dw : sa masse est $\rho\,du\,dv\,dw$, et les composantes de sa vitesse sont $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$.

Désignant par X, Y et Z les composantes de la force extérieure, rapportée à l'unité de masse, l'équation du mouvement, projeté sur l'axe des x, est

$$\rho\,du\,dv\,dw\left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + (p - p')\,dv\,dw = 0,$$

p désignant la pression au point u, v, w et p' ce que devient cette pression quand, v et w conservant la même valeur, u augmente de du. Les variations correspondantes de x, y, z sont, d'après (3),

$$dx = \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial x}}\,du, \qquad dy = \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial y}}\,du, \qquad dz = \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial z}}\,du.$$

On a donc

$$p' = p + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial y}} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial z}}\right)\frac{du}{\theta}.$$

On voit qu'on obtient les trois équations du mouvement sous la forme

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X\right) + \frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial y}} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial z}}\right) = 0,\\
&\rho\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y\right) + \frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial x}} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial y}} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial z}}\right) = 0,\\
&\rho\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z\right) + \frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial x}} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial y}} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial z}}\right) = 0.
\end{aligned}\right.$$

On peut aussi écrire ces équations de la manière suivante :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\rho\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,\\
&\rho\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial w}{\partial y}\right] + \frac{\partial p}{\partial y} = 0,\\
&\rho\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial w}{\partial z}\right] + \frac{\partial p}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\right.$$

La première équation (5) s'obtient en multipliant les trois équations (4) respectivement par $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial w}{\partial x}$, ajoutant et remarquant

que

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}} = 0,$$

et de même pour les deux autres.

6. Les équations

$$\rho = F(p), \qquad \rho = \frac{D}{\theta}$$

permettent de ramener les équations (5) à un système de trois équations aux dérivées partielles du second ordre ne renfermant plus que trois fonctions inconnues.

On a en effet

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{d\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{D}{\theta^2 F'(p)}\frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial x} = {} & \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} \\ & + \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z} \\ & + \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}.\end{aligned}$$

Il suffirait de substituer ces valeurs dans la première des équations (5) et d'y remplacer p par sa valeur en fonction de θ, puis d'opérer de la même manière sur les deux autres équations (5).

7. Je renvoie à la première Partie du Mémoire pour la définition de la vitesse de propagation d'un mouvement dans un autre. Si S repré-

sente la surface de l'onde à l'instant t, c'est-à-dire la surface qui, à cet instant t, sépare les deux mouvements compatibles, et si S_1 représente la surface de l'onde à l'instant $t + dt$, on mène la normale au point x, y, z de la surface S et l'on désigne par dn la portion de cette normale comprise entre S et S_1. Le rapport $\frac{dn}{dt}$ est la vitesse de propagation.

Mais la surface S peut être ici envisagée de deux manières différentes, soit comme le lieu de positions initiales des points simultanément atteints par les deux mouvements, soit comme le lieu de leurs positions actuelles. Dans le premier cas, l'équation de cette surface est une relation entre les coordonnées initiales x, y, z, dans le deuxième cas entre les coordonnées u, v, w. Il est clair que l'expression de la vitesse de propagation ne peut être la même dans les deux cas.

Pour éviter toute confusion, je continuerai à représenter par S la surface de l'onde, lieu des positions initiales des points atteints simultanément par les deux mouvements et je désignerai par S′ la surface de l'onde, lieu de leurs positions à l'instant t. La vitesse de propagation relative à S sera $\frac{dn}{dt}$ et la vitesse de propagation relative à S′ sera désignée par $\frac{dn'}{dt}$. Je calculerai d'abord la première de ces vitesses.

8. Les équations du mouvement étant supposées réduites, par la méthode du n° **6**, à un système de trois équations aux dérivées partielles du second ordre renfermant trois fonctions inconnues, u, v, w, soient $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ deux systèmes d'intégrales de ces équations représentant des mouvements compatibles. On suppose essentiellement que la continuité n'est pas troublée, de sorte que, tout le long de la surface de l'onde, les vitesses qui correspondent aux deux systèmes d'intégrales sont les mêmes. Posant donc

$$u_1 - u_2 = U, \qquad v_1 - v_2 = V, \qquad w_1 - w_2 = W,$$

on a, le long de la surface de l'onde, les équations

$$U = 0, \qquad V = 0, \qquad W = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

Soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale au point x, y, z de la surface S ; on a

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\mu}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\nu}{\frac{\partial U}{\partial z}}.$$

Différentiant d'ailleurs l'équation $U = 0$ le long de la normale, on trouve

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda \frac{\partial U}{\partial x} + \mu \frac{\partial U}{\partial y} + \nu \frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0$$

ou, à cause des équations précédentes,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\lambda}\frac{dn}{dt}\frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Puisque $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, tout le long de la surface de l'onde, il faut qu'il en soit de même de $\frac{\partial U}{\partial x}$. On démontrerait de même que toutes les dérivées partielles de U, V, W sont nulles sur la surface de l'onde; de sorte qu'on a les douze équations

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial U}{\partial t} = 0, & \frac{\partial U}{\partial x} = 0, & \frac{\partial U}{\partial y} = 0, & \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \\
\frac{\partial V}{\partial t} = 0, & \frac{\partial V}{\partial x} = 0, & \frac{\partial V}{\partial y} = 0, & \frac{\partial V}{\partial z} = 0; \\
\frac{\partial W}{\partial t} = 0, & \frac{\partial W}{\partial x} = 0, & \frac{\partial W}{\partial y} = 0, & \frac{\partial W}{\partial z} = 0.
\end{array}$$

9. Des équations précédentes, on en déduit d'autres qui doivent être satisfaites aussi en tous les points de la surface de l'onde. Je me bornerai à écrire celles qui concernent la fonction U. On a d'abord

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}} = \frac{\mu}{\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}},$$

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}} = \frac{\mu}{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}},$$

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}} = \frac{\mu}{\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial t} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial t}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial t} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial t} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Des quatre dernières on tire

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

et l'on peut maintenant exprimer les dérivées secondes de U en fonction d'une seule d'entre elles, ce qui donne

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\mu}{\lambda}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} = \frac{\nu}{\lambda}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} = \frac{\mu\nu}{\lambda^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\mu^2}{\lambda^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\nu^2}{\lambda^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Il existe évidemment des relations analogues pour V et W.

10. Considérant la première des équations du mouvement, mise sous la forme

$$\theta F(p)\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right] = \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

où l'on peut supposer $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ remplacé par son développement du n° **6**, et substituant successivement les deux systèmes d'intégrales u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2, puis faisant la différence, il reste, puisque les dérivées premières

sont égales, de sorte qu'on peut continuer à les écrire sans indice.

$$
\begin{aligned}
&\theta F'(p)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)\\
&\quad=\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}\\
&\quad+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\\
&\quad+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}}\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}}\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z};
\end{aligned}
$$

et, en remplaçant toutes les dérivées secondes par leurs valeurs en fonction de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$, il vient

$$
(6)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}\theta F'(p)\left(\frac{dn}{dt}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\\
&\quad=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}\right)\\
&\quad-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}}\right)\\
&\quad+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux autres équations du mouvement conduisent à des équations toutes semblables; les seconds membres sont identiques à celui de l'équation (6), de sorte que l'on peut égaler les premiers membres; on obtient ainsi

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}}{\lambda}
&=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}}{\mu}\\
&=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}}{\lambda},
\end{aligned}
$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}}{\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial x}}+\mu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial y}}+\nu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial z}}}=\frac{\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}}{\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial x}}+\mu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial y}}+\nu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial z}}}$$

$$=\frac{\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}}{\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial x}}+\mu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial y}}+\nu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial z}}}.$$

Les équations précédentes, combinées avec l'équation (6), permettent d'en éliminer les dérivées secondes. Remarquant que la parenthèse du premier membre devient $\lambda\theta$ quand on remplace les dérivées secondes par les quantités proportionnelles, on obtient finalement

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)^2=\frac{1}{\theta^2 F'(p)}\left[\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial z}}\right)^2\right.$$
$$+\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial z}}\right)^2$$
$$\left.+\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial z}}\right)^2\right].$$

C'est l'expression cherchée de la vitesse de propagation. Elle dépend, comme on voit, des dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots$, ainsi que la direction de la normale.

11. On arrive à des résultats bien différents en calculant la valeur $\frac{dn'}{dt}$ de la vitesse de propagation qui se rapporte à la surface de l'onde S', lieu des positions actuelles des points atteints à la fois par les deux mouvements.

Les douze équations du n° **8** sont satisfaites sur la surface de l'onde S'. Considérant, en particulier, l'équation $\frac{\partial U}{\partial x}=0$, et désignant par λ', μ',

ν' les cosinus directeurs de la normale en un point de la surface S′, on a

$$(7)\qquad \lambda' du + \mu' dv + \nu' dw = 0,$$

du, dv, dw désignant les variations des coordonnées quand on se déplace infiniment peu sur la surface.

D'autre part, quand u, v, w augmentent de du, dv, dw, les coordonnées x, y, z subissent des variations données par les équations (3) du n° 4. Exprimant que l'équation $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ continue à avoir lieu quand on passe du point considéré sur la surface S′ au point infiniment voisin, on a

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\left(du\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}} + dv\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}} + dw\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}}\right)\\ &+\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\left(du\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}} + dv\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}} + dw\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}}\right)\\ &+\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}\left(du\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}} + dv\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}} + dw\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

L'équation (8) doit être identique à l'équation (7); les coefficients de du, dv, dw sont donc proportionnels; ainsi

$$\frac{\lambda'}{\dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}}$$

$$= \frac{\mu'}{\dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}}$$

$$= \frac{\nu'}{\dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}},$$

ou, à cause des relations du n° **9**,

$$\frac{\lambda'}{\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial x}}+\mu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial y}}+\nu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial z}}}=\frac{\mu'}{\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial x}}+\mu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial y}}+\nu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial z}}}$$

$$=\frac{\nu'}{\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial x}}+\mu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial y}}+\nu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial z}}}.$$

Posant, pour abréger,

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial z}}=\mathrm{A},$$

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial z}}=\mathrm{B},$$

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial z}}=\mathrm{C},$$

les relations précédentes deviennent

$$\frac{\lambda'}{\mathrm{A}}=\frac{\mu'}{\mathrm{B}}=\frac{\nu'}{\mathrm{C}}.$$

12. Si l'on considère l'équation $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}=0$, qui est satisfaite en un point de la surface S′, il est visible que cette équation est encore satisfaite quand u augmente de $\lambda'\,dn'$, v de $\mu'\,dn'$ et w de $\nu'\,dn'$, et qu'en même temps t augmente de dt. On a donc, en tenant compte des relations (3) du n° **4**,

$$0\,\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial t^2}+\frac{dn'}{dt}\Bigg[\lambda'\left(\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial x}}\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial y}}\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial z}}\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial z\,\partial t}\right)$$
$$+\mu'\left(\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial x}}\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial y}}\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial z}}\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial z\,\partial t}\right)$$
$$+\nu'\left(\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial x}}\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial y}}\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial z}}\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial z\,\partial t}\right)\Bigg]=0.$$

Mais

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t}} = \frac{\mu}{\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial t}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial t}}$$

et l'équation précédente peut s'écrire

$$\theta\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{dn'}{dt}(\lambda' A + \mu' B + \nu' C)\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t} = 0.$$

On trouverait de même

$$\theta\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t} + \frac{1}{\lambda}\frac{dn'}{dt}(\lambda' A + \mu' B + \nu' C)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0,$$

et l'élimination de $\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t}$ donne

$$\theta^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dn'}{dt}\right)^2(\lambda' A + \mu' B + \nu' C)^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

D'autre part, on a trouvé au n° **9**

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dn}{dt}\right)^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^3}.$$

La comparaison de ces équations donne

$$\left(\frac{dn'}{dt}\right)^2 = \frac{\theta^2\left(\frac{dn}{dt}\right)^2}{(\lambda' A + \mu' B + \nu' C)^2}.$$

Mais on a

$$\frac{\lambda'}{A} = \frac{\mu'}{B} = \frac{\nu'}{C} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\lambda' A}{A^2} = \frac{\mu' B}{B^2} = \frac{\nu' C}{C^2} = \frac{\lambda' A + \mu' B + \nu' C}{A^2 + B^2 + C^2};$$

d'où l'on déduit

$$(\lambda' A + \mu' B + \nu' C)^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Donc

$$\left(\frac{dn'}{dt}\right)^2 = \frac{\theta^2\left(\frac{dn}{dt}\right)^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Or on a trouvé au n° **10**

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2 F'(p)}(A^2 + B^2 + C^2),$$

et l'on obtient finalement, pour la vitesse de propagation,

$$\frac{dn'}{dt} = \pm\sqrt{\frac{1}{F'(p)}} = \pm\sqrt{\frac{dp}{d\rho}},$$

valeur identique à celle qui a été obtenue dans la première Partie du Mémoire, quand on rapportait la vitesse de propagation au fluide lui-même et non à des coordonnées fixes.

Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique;

PAR M. F. KLEIN (DE GOETTINGUE).

Extrait d'une Lettre adressée à M. C. JORDAN.

.... Lors de mon dernier séjour à Paris, je vous ai raconté que je venais de résoudre affirmativement une question que vous m'aviez posée autrefois à plusieurs reprises. L'équation des 27 droites d'une surface cubique et la trisection des fonctions hyperelliptiques du premier ordre ayant le même groupe, il s'agissait de réduire, s'il était possible, le premier problème au second. J'ai donné là-dessus déjà quelques développements dans une séance de la Société mathématique de France [1]. Permettez-moi d'y revenir aujourd'hui, et d'exposer mes raisonnements d'une manière plus complète. Sans doute, les explications que je vais donner paraîtront encore un peu vagues, comme je n'écris pas des formules détaillées, mais j'espère pourtant qu'elles pourront avoir quelque intérêt.

Qu'il me soit permis d'abord de rappeler, en peu de mots, la forme que j'ai donnée autrefois à la résolution des équations du cinquième

[1] 13 avril 1887.

degré par les fonctions elliptiques. Dans ce but, je dois vous parler de deux choses : d'abord de la forme normale que j'ai donnée à l'équation modulaire pour la transformation du cinquième ordre des fonctions elliptiques, ensuite de la réduction de l'équation générale du cinquième degré à cette forme normale.

Quant au premier point, considérons les expressions suivantes, dans lesquelles ρ signifie un facteur indéterminé

$$(1)\qquad \rho z_1 = e^{\frac{i\pi\tau}{5}}\,\vartheta_1(\tau, 5\tau), \qquad \rho z_2 = e^{\frac{4i\pi\tau}{5}}\,\vartheta_1(2\tau, 5\tau),$$

τ étant le quotient des périodes, suivant la notation de M. Weierstrass. Il est facile de démontrer que, pour une transformation linéaire quelconque de τ, le quotient $z_1 : z_2$ subit des substitutions linéaires (fractionnaires) à coefficients constants [1]. Ces substitutions étant les mêmes pour deux transformations linéaires qui sont congruentes suivant le module 5, leur nombre devient égal à 60, et la détermination de $z_1 : z_2$ comme fonction des invariants rationnels g_2, g_3 de l'intégrale elliptique équivaut à la résolution complète de l'équation modulaire correspondant à la transformation du cinquième ordre. Maintenant, les substitutions de $z_1 : z_2$ ne sont autre chose que les substitutions bien connues aujourd'hui de l'*icosaèdre*. Soit, comme dans mon Livre [2],

$$(2)\qquad \begin{cases} f(z_1, z_2) = z_1^{11} z_2 + 11 z_1^6 z_2^6 - z_1 z_2^{11}, \\ H(z_1, z_2) = -(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228(z_1^{10} - z_2^{10}) z_1^5 z_2^5 - 494 z_1^{10} z_2^{10}; \end{cases}$$

$z_1 : z_2$ dépend de l'équation icosaédrique

$$(3)\qquad \frac{H(z_1, z_2)^3}{1728 f(z_1, z_2)^5} = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2},$$

---

(1) Voir, par exemple, mon Mémoire *Sur les courbes elliptiques normales du $n^{ième}$ ordre*, etc. (*Mémoires mathématiques de la Société scientifique de Leipzig*, t. XII).

(2) *Leçons sur l'icosaèdre et la résolution des équations du cinquième degré*. Leipzig, 1884 (Teubner).

et c'est cette équation icosaédrique que je considère ici comme *la forme normale* de l'équation modulaire pour la transformation du cinquième ordre. Faisons encore la remarque suivante. Au lieu des substitutions du quotient $z_1 : z_2$, on peut considérer les substitutions correspondantes unimodulaires des deux variables homogènes z_1, z_2. Comme le déterminant d'une substitution binaire est du deuxième degré dans les coefficients, le nombre de ces substitutions homogènes devient égal à 120. Mais on peut se demander s'il n'est pas possible de trouver parmi elles 60, qui forment elles seules un groupe isomorphe holoédriquement aux substitutions fractionnaires de $z_1 : z_2$. Or, j'ai démontré que c'est impossible. Je reviendrai immédiatement à ce théorème.

Passons maintenant à la résolution des équations du cinquième degré, ou plutôt à leur réduction à la forme icosaédrique que je viens de donner. Sans doute la possibilité de cette réduction dépend en première ligne de ce fait, que le groupe alterné d'une équation du cinquième degré est holoédriquement isomorphe au groupe de l'icosaèdre, mais la réduction elle-même ne repose pas, suivant mes points de vue, sur la considération des groupes : elle appartient plutôt à la Géométrie analytique, ou, si l'on veut, à la théorie des fonctions algébriques. Je ne veux pas répéter ici les détails de cette réduction, que j'ai donnés dans mon Livre, avec tous les développements nécessaires. C'est un seul point fondamental sur lequel je dois insister ici. Je viens de dire que le nombre des substitutions de l'icosaèdre est nécessairement doublé quand on passe du quotient $z_1 : z_2$ aux quantités homogènes z_1, z_2. C'est pour cela, comme je l'ai démontré, qu'il devient impossible d'opérer la réduction à la forme icosaédrique d'une manière purement rationnelle. La réduction doit donc contenir quelque irrationnalité. Cette irrationnalité n'abaissant pas le groupe de l'équation, je l'appelle une *irrationnalité accessoire*. Du reste, cette irrationnalité peut être choisie de différentes manières, par exemple comme la racine carrée d'une fonction rationnelle bien simple des coefficients de l'équation du cinquième degré.

Ceci étant bien conçu, pour venir au but que je me suis proposé ici, j'aurais à faire des considérations tout à fait analogues sur les fonctions hyperelliptiques (du premier ordre) et les équations du vingt-septième degré.

En première ligne donc j'aurai à construire une forme normale pour l'équation modulaire de la transformation du troisième ordre des fonctions hyperelliptiques. Qu'il me soit permis de m'appuyer ici sur les recherches de deux de mes élèves, M. Witting et M. Maschke. M. Witting s'est occupé de généraliser, pour les fonctions hyperelliptiques, ce que j'avais fait pour les fonctions elliptiques dans ma *Théorie des courbes normales supérieures* (¹). Voici le détail que je dois emprunter à ses recherches. Soit

$$(5) \qquad \vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

une fonction thêta hyperelliptique impaire quelconque; ρ un facteur indéterminé. Considérons les quatre fonctions

$$(6) \qquad \rho z_{\alpha\beta} = e^{\frac{i\pi}{3}(\tau_{11}\alpha^2+2\tau_{12}\alpha\beta+\tau_{22}\beta^2)}\vartheta(\alpha\tau_{11}+\beta\tau_{12}, \alpha\tau_{21}+\beta\tau_{22}; 3\tau_{11}, 3\tau_{12}, 3\tau_{22}),$$
$$\alpha, \beta = 0, 1; \quad 0, 1; \quad 1, 0; \quad 1, 1; \quad 1, 2.$$

Ces quatre fonctions doivent être considérées comme étant strictement analogues aux fonctions z_1, z_2 de l'équation (2). Nous constatons d'abord que les quotients de ces quatre fonctions auront la propriété *de subir des substitutions linéaires à coefficients constants* pour chaque transformation linéaire des τ_{ik}, qui laisse inaltérée la caractéristique de la fonction ϑ. Nous voyons ensuite que les substitutions correspondant de cette façon à deux transformations linéaires congruentes suivant le module 3 seront les mêmes. C'est pourquoi le nombre total des substitutions des quotients des z devient égal à un nombre que vous avez déterminé dans votre *Traité des substitutions*, c'est-à-dire à $\frac{(3^4-1)3^3(3^2-1)3}{1} = 25920$. Nous considérons ensuite les substitutions homogènes unimodulaires de quatre variables z correspondant aux substitutions fractionnaires des quotients. Le déterminant d'une substitution quaternaire étant du quatrième ordre dans les coefficients, le nombre total de ces substitutions homogènes se trouve égal

(¹) WITTING, *Mathematische Annalen*, t. 29 (*Schlömilch's Zeitschrift*, Bd. 32).

à 4.25920; mais on démontre qu'il suffit de considérer la moitié seulement, c'est-à-dire 2.25920 substitutions formant à elles seules un groupe isomorphe au groupe des substitutions fractionnaires. L'analogie avec les z_1, z_2 se trouve ici encore une fois conservée, car on a le théorème trouvé par M. Maschke, qu'il est impossible de construire avec ces 2.25920 substitutions quelque sous-groupe qui soit également isomorphe au groupe donné. Il s'agira maintenant de chercher les équations par lesquelles les rapports des z sont liés aux modules algébriques des intégrales hyperelliptiques, équations que nous considérerons dans la suite comme cette *forme normale* de l'équation modulaire de la transformation du troisième ordre qu'il fallait construire. Mais, auparavant, il faut faire une remarque essentielle qui n'était pas nécessaire dans le cas des fonctions elliptiques. Pour obtenir les substitutions linéaires des quotients des z, nous avons dû considérer seulement ces transformations linéaires des z_{ik}, qui laissaient inaltérée la caractéristique de la fonction (5). C'est pourquoi nous ne devons pas considérer ici comme modules algébriques des intégrales hyperelliptiques les invariants *rationnels* de cette forme binaire du sixième degré qui se trouve sous le signe radical, mais certains invariants *irrationnels* correspondant à la caractéristique de la fonction $\mathfrak{z}$. Notre fonction $\mathfrak{z}$ étant impaire, elle est associée à une décomposition déterminée de la forme sextique en un facteur linéaire et un facteur du cinquième degré. Or, suivant les idées de M. Weierstrass, une forme ainsi décomposée peut être changée rationnellement dans celle-ci :

$$(7) \qquad f = x_2(4x_1^5 - g_2x_1^3x_2^2 - g_3x_1^2x_2^3 - g_4x_1x_2^4 - g_5x_2^5).$$

Ce sont ces coefficients g_2, g_3, g_4, g_5 qui sont les invariants irrationnels que nous devons employer dans notre étude des quantités z. Quant aux équations explicites, par lesquelles ils sont liés aux z, c'est la recherche dans laquelle M. Maschke se trouve engagé. Les calculs n'étant pas encore achevés, il suffira d'indiquer ici que les résultats seront publiés prochainement dans les *Mathematische Annalen*.

Considérons maintenant l'équation du vingt-septième degré des droites d'une surface cubique. Comme vous l'avez prouvé dans votre Traité, le groupe de cette équation, après l'adjonction d'une racine

carrée ([1]), se trouve isomorphe sans mériédrie au groupe des 25920 substitutions fractionnaires des quotients des z. Or je ne considérerai pas quelques autres qualités spéciales de cette équation, mais je m'occuperai, dans ce qui suit, de toutes les équations du vingt-septième degré ayant le même groupe. Est-il possible de réduire ces équations *rationnellement* au problème des z, que nous avons défini? D'après les indications données pour les équations du cinquième degré, cela dépend des substitutions homogènes unimodulaires, correspondant aux substitutions fractionnaires des quotients des z. Si le groupe de ces substitutions homogènes se trouvait holoédriquement isomorphe au groupe des substitutions fractionnaires, la réduction rationnelle s'opérerait facilement par un procédé que j'ai donné dans le tome XV des *Mathematische Annalen* ([2]) et sur lequel je reviendrai tout à l'heure. Mais, comme le groupe des substitutions homogènes des z est nécessairement deux fois plus grand que le groupe des substitutions fractionnaires, la réduction rationnelle devient impossible; il faut donc introduire quelque irrationnalité accessoire.

Voici maintenant une méthode facile de réduction. Je la donne sous la même forme géométrique sous laquelle elle s'est présentée à mon esprit, en relation intime, comme vous le verrez, avec mes anciennes recherches sur l'espace réglé.

Le groupe des substitutions homogènes des z n'étant pas holoédriquement isomorphe au groupe de l'équation proposée, la première chose à faire consiste à en déduire un autre groupe de substitutions homogènes qui le soit. Dans ce but il suffit évidemment de considérer les substitutions des déterminants $p_{ik} = z_i z'_k - z'_i z_k$, formées de deux séries de variables cogrédientes z, z', ou bien les coefficients a_{ik} d'une forme linéaire des p_{ik}

$$\sum a_{ik} p_{ik},$$

c'est-à-dire *les coordonnées d'un complexe linéaire*.

([1]) Quant à cette racine carrée, j'ai démontré qu'elle se rapporte au discriminant de la surface cubique, c'est-à-dire à cette expression, qui, égalée à zéro, donne la condition pour l'existence d'un point double.

([2]) *Mémoire sur la résolution de certaines équations du septième et du huitième degré.*

Maintenant, par le procédé donné au tome XV des *Mathematische Annalen*, nous sommes en état de construire six fonctions rationnelles des vingt-sept racines x de l'équation proposée, qui soient des a_{ik}, c'est-à-dire qui se substituent comme les a_{ik}, quand on effectue d'une part sur les x les substitutions du groupe de l'équation et d'autre part sur les z les substitutions linéaires correspondantes. Nous disons, suivant l'expression employée dans mon Livre, que nous avons coordonné d'une manière *covariante* aux racines x un certain complexe linéaire de l'espace des z.

Tout ce qui reste à faire maintenant est de coordonner à ce complexe linéaire d'une manière covariante un point z. Or c'est le même problème duquel je me suis occupé récemment dans mes recherches sur la résolution des équations générales du sixième et du septième degré ([1]). On commence à coordonner au complexe a_{ik} d'une manière covariante et rationnelle trois autres complexes a'_{ik}, a''_{ik}, a'''_{ik} et l'on cherche ensuite, suivant les règles connues, deux combinaisons linéaires de ces complexes, qui représentent des lignes droites, se coupant en un point. C'est cette dernière opération qui introduit une irrationnalité accessoire, composée de deux racines carrées. Mais nous voilà parvenus au but que nous nous sommes posé; car le point d'intersection des deux droites, c'est bien le point z qu'il fallait construire.

En effet, les coordonnées z du point, que nous venons de déterminer, dépendront des racines x de l'équation proposée, de telle sorte qu'elles peuvent être définies par un *problème normal*, dans lequel g_2, g_3, g_4, g_5 ont été remplacés par des fonctions des coefficients de l'équation du vingt-septième degré rationnellement connues. En calculant ensuite les z par les formules hyperelliptiques (6), nous avons résolu l'équation du vingt-septième degré.

Je ne saurais finir sans vous annoncer dès aujourd'hui une publication de mon ancien élève, M. Cole, agrégé à l'Université de Boston (Harvard College). Vous savez bien que j'ai eu toujours un intérêt tout particulier pour cette question de la réduction des équations quelconques à des équations normales du même groupe. Or, pendant l'hiver passé, dans un Cours spécial, j'ai fait de mes études un en-

([1]) *Mathematische Annalen*, t. XXVIII.

semble, sans pourtant aller jusqu'aux développements que je viens de donner dans cette Lettre. Maintenant M. Cole s'est engagé à faire une rédaction de ce Cours, qui doit être imprimé dans l'*American Journal* ou quelque autre part. Ce sera, pour ainsi dire, une continuation de mon Livre sur l'icosaèdre.

Göttingue, le 22 septembre 1887

Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien. Premier Mémoire : *Étude d'une substitution crémonienne isolée ;*

PAR M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

Après avoir, dans deux Mémoires insérés au *Journal de Mathématiques* (années 1885 et 1886), étudié les groupes d'ordre fini contenus dans les groupes quadratique et cubique Cremona, je me propose, dans le présent travail, d'étendre le même genre de recherches aux substitutions birationnelles qui, au lieu d'avoir seulement une série de trois variables homogènes x_i (coordonnées d'un point x du plan), contiennent deux séries de trois variables homogènes : x_i (coordonnées d'un point x du plan), u_i (coordonnées d'une droite u du plan).

Soit

$$s = \begin{matrix} x_i & \varphi_i(\overset{a}{x}, \overset{b}{u}) \\ u_i & \psi_i(\overset{c}{x}, \overset{d}{u}) \end{matrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une pareille substitution, φ_i et ψ_i étant des polynômes qui contiennent les x_i et les u_i aux dimensions marquées par les entiers a, b, c, d, lesquels ne peuvent être négatifs.

La substitution s sera *birationnelle* si, posant

$$\alpha y_i = \varphi_i(x, u), \qquad \beta v_i = \psi_i(x, u),$$
$$(\alpha, \beta = \text{facteur de proportionnalité})$$

on a aussi

$$\gamma x_i = \theta_i(\overset{a'}{y}, \overset{b'}{v}), \qquad \delta u_i = \eta_i(\overset{c'}{y}, \overset{d'}{v}),$$
$$(\gamma, \delta = \text{facteur de proportionnalité}),$$

θ_i et η_i étant de même nature que φ_i et ψ_i. On pourra écrire, dans ce cas,

$$s^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \theta_i(\overset{a'}{x}, \overset{b'}{u}) \\ u_i & \eta_i(\overset{c'}{x}, \overset{d'}{u}) \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{Bmatrix}.$$

La substitution s est une substitution *de contact*, si chacun des deux systèmes d'équations

$$\sum_i u_i x_i = \sum_i u_i\, dx_i = \sum_i x_i\, du_i = 0$$

et

$$\sum_i y_i v_i = \sum_i v_i\, dy_i = \sum_i y_i\, dv_i = 0$$

entraîne l'autre.

J'appelle *crémonienne* une substitution

$$s = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix},$$

qui est à la fois *birationnelle* et *de contact*. L'appellation *crémonienne* est justifiée par le fait que s se réduit à une substitution Cremona ordinaire, si l'entier b est nul.

Soient deux crémoniennes s et s',

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u) \\ u_i & \psi_i(x, u) \end{vmatrix}, \qquad s' = \begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(x, u) \\ u_i & \psi'_i(x, u) \end{vmatrix};$$

la substitution

$$\left| \begin{matrix} x_i & \varphi'_i(\varphi, \psi) \\ u_i & \psi'_i(\varphi, \psi) \end{matrix} \right|$$

est, par définition, le produit $s's$ de s' par s. Je démontre que les crémoniennes forment un groupe, que j'appelle groupe *crémonien*.

C'est la construction de groupes crémoniens, dits *quadratiques*, formés par des substitutions

$$\left\{ \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\},$$

les entiers $a, b, c, d \leq 2$, qui est l'objet du présent Mémoire.

Pour la construction des groupes Cremona, je pouvais opérer sur des substitutions dont les propriétés étaient bien connues. Au contraire, le champ des recherches relatif aux crémoniennes est presque inexploré. On connaît bien (Mayer, *Mathematische Annalen*, t. VIII) certaines équations aux dérivées partielles, auxquelles φ_i et ψ_i doivent satisfaire pour que la substitution s soit de contact, mais personne n'a encore donné, au moins à ma connaissance, les conditions de birationnalité et la forme explicite des fonctions entières φ_i et ψ_i.

La construction des groupes crémoniens a dû, par conséquent, être précédée de la construction et de l'étude d'une crémonienne isolée.

J'ai démontré dans un autre travail (*Journal de Mathématiques*, 1887, et *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 8 février 1886) que, si l'un des entiers a, b, c, d est zéro ou un, la crémonienne s s'obtient en combinant une substitution Cremona, convenablement choisie, avec la *substitution d'échange*

$$\left| \begin{matrix} x_i & u_i \\ u_i & x_i \end{matrix} \right|.$$

Dans ce cas, je donne à s le nom de *crémonique*.

Ce résultat m'a permis de construire les groupes crémoniens *linéaires*

formés de substitutions

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

où aucun des entiers a, b, c, d ne dépasse l'unité.

J'ai fait voir qu'un pareil groupe, s'il est d'ordre fini, s'obtient en combinant avec la substitution d'échange l'un des groupes de M. Jordan [linéaires et d'ordre fini à trois variables homogènes (*Journal de Crelle*, t. 84)].

Un groupe quadratique crémonien contient, ou peut contenir, des substitutions linéaires (monistiques ou dualistiques), des crémoniques et des substitutions

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix},$$

qui s'appelleront tout simplement *quadratiques crémoniennes*.

Le présent Mémoire est exclusivement consacré à l'étude d'une substitution isolée contenue dans un groupe quadratique crémonien. Les substitutions linéaires (monistiques ou dualistiques) ont été étudiées ailleurs (*Journal de Mathématiques*, fasc. I, 1887, et *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 8 février 1886); je ne m'occuperai donc que des crémoniques et des crémoniennes.

Un second Mémoire traitera de la composition des crémoniennes, de la construction des groupes quadratiques et de la recherche des groupes d'ordre fini.

Le présent travail est divisé en cinq Parties.

Dans la première Partie, j'expose les définitions et quelques généralités applicables à des crémoniennes de dimensions quelconques, et je fais voir que le produit de deux crémoniennes est aussi une crémonienne, en d'autres termes que *les crémoniennes forment un groupe*, le groupe *crémonien*.

Dans la deuxième Partie, j'établis le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute crémonique quadratique est de la forme* $\alpha\sigma\beta$, α *et* β *étant des substitutions linéaires quelconques, monistiques ou*

dualistiques, et σ *l'une quelconque des trois substitutions*

$$\zeta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2x_3 \\ x_2 & x_3x_1 \\ x_3 & x_1x_2 \\ u_1 & x_1^2u_1 \\ u_2 & x_2^2u_2 \\ u_3 & x_3^2u_3 \end{vmatrix}, \quad \varpi = \begin{vmatrix} x_1 & x_1x_2 \\ x_2 & x_1^2 \\ x_3 & x_2x_3 \\ u_1 & -x_1r_1 \\ u_2r & x_2^2u_2 \\ u_3 & -x_1^2u_3 \end{vmatrix}, \quad \rho = \begin{vmatrix} x_1 & x_1x_2 \\ x_2 & x_2^2 \\ x_3 & \mathrm{A} \\ u_1 & x_2r_2 \\ u_2 & x_1^2u_3 - x_2^2u_2 \\ u_3 & x_2^2u_3 \end{vmatrix};$$

$$\zeta = \zeta^{-1}, \qquad \varpi = \varpi^{-1}, \qquad \rho = \rho^{-1},$$

$$\mathrm{A} = x_1^2 - x_2x_3, \qquad \mathrm{A}_i = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_i}, \qquad r_i = (\mathrm{A}u)_i,$$

$$r_1 = \mathrm{A}_2u_3 - \mathrm{A}_3u_2, \qquad \ldots.$$

Je définis (**17** du Mémoire) certains *éléments fondamentaux* et certains *connexes fondamentaux* qui jouent vis-à-vis d'une crémonienne respectivement un rôle analogue à celui des *points fondamentaux* et des *lignes fondamentales* vis-à-vis d'une substitution Cremona. Les expressions *éléments* et *connexes* signifient d'ailleurs (**1** du Mémoire) la même chose que dans la terminologie de Clebsch (*Leçons sur la Géométrie,* traduction Benoist, t. III, *Connexes*).

Ainsi, pour mettre en parallèle les propriétés respectives des substitutions Cremona et crémoniennes,

Une substitution Cremona fait correspondre, à un de ses points fondamentaux, ∞ points, et aux ∞ points d'une de ses lignes fondamentales, *un seul* point.	Une substitution crémonienne fait correspondre, à *un* de ses éléments fondamentaux, ∞ éléments, et aux ∞^2 (**1** du Mémoire) éléments d'un connexe fondamental, ou *un nombre fini* ou ∞ au plus éléments.

Un *facteur fondamental* est un facteur qui, égalé à zéro, donne l'équation d'un connexe fondamental; pour chacune des crémoniennes que je considère, je donne le Tableau des éléments et des facteurs fondamentaux.

Dans la troisième Partie, j'établis le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute crémonienne quadratique qui n'est pas crémonique est un produit de deux ou trois crémoniques.*

Nous sommes amenés ainsi à distinguer ainsi les crémoniennes à *deux* et à *trois composantes crémoniques.*

Comme toute crémonique, d'après la première Partie, s'obtient en combinant des substitutions linéaires avec ζ, ϖ, ρ, lesquelles sont des substitutions quadratiques Cremona, on voit que toute crémonienne quadratique s'obtient en combinant des substitutions quadratiques Cremona avec des substitutions linéaires monistiques ou dualistiques. Ce résultat est à rapprocher du fait bien connu, qu'une substitution Cremona d'ordre quelconque s'obtient en combinant des collinéations (substitutions linéaires monistiques) avec des substitutions quadratiques Cremona.

La quatrième Partie est consacrée aux crémoniennes quadratiques à deux composantes crémoniques, et établit la proposition suivante, dans l'énoncé de laquelle on a désigné par E et H les substitutions

$$H = H^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & hu_3 \\ x_3 & hu_2 \\ u_1 & hx_1 \\ u_2 & x_3 \\ u_3 & x_2 \end{vmatrix}, \qquad E = E^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_3 \\ x_3 & u_2 - eu_3 \\ u_1 & -x_1 \\ u_2 & ex_2 + x_3 \\ u_3 & x_2 \end{vmatrix}.$$

$$h, \quad e = \text{const.}$$

THÉORÈME. — *Toute crémonienne quadratique à deux composantes crémoniques est de la forme $\alpha s \beta$, α et β étant deux substitutions linéaires monistiques ou dualistiques, et s une des quatre crémoniennes suivantes :*

$$\varpi E \varpi = (\varpi E \varpi)^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & -x_1 u_3 v_1 \\ x_2 & v_1^2 \\ x_3 & -u_3(x_2^2 u_2 + e x_1^2 u_3) \\ u_1 & v_1(2 e x_1 u_3 - x_2 u_1) \\ u_2 & u_3^2(e x_1^2 + x_2 x_3) \\ u_3 & -v_1^2 \end{vmatrix},$$

$$\rho E \varpi = (\varpi E \rho)^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & -x_1 u_3 v_1 \\ x_2 & x_1^2 u_3^2 \\ x_3 & v_1^2 + u_3(x_2^2 u_2 + e x_1^2 u_3) \\ u_1 & x_1 u_3(x_2 u_3 + 2 v_1) \\ u_2 & v_1^2 - u_3^2(e x_1^2 + x_2 x_3) \\ u_3 & x_1^2 u_3^2 \end{vmatrix},$$

$$\varpi E \rho = (\rho E \varpi)^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & -x_2 u_3 v_2 \\ x_2 & v_2^2 \\ x_3 & u_3(x_1^2 u_3 - x_2^2 u_2 - e x_2^2 u_3) \\ u_1 & v_2(v_1 + 2 e x_2 u_3) \\ u_2 & u_3^2(e x_2^2 + \Lambda) \\ u_3 & -v_2^2 \end{vmatrix},$$

$$\rho H \rho = (\rho H \rho)^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & h x_2 u_3 v_2 \\ x_2 & h^2 x_2^2 u_3^2 \\ x_3 & v_2^2 - h^2 u_3(x_1^2 u_3 - x_2^2 u_2) \\ u_1 & -h x_2 u_3(2 v_2 + h^2 x_1 u_3) \\ u_2 & v_2^2 - h^2 u_3^2 \Lambda \\ u_3 & h^2 x_2^2 u_3^2 \end{vmatrix},$$

Λ et v_i ayant la même signification que dans la première Partie.

La cinquième Partie est consacrée aux substitutions crémoniennes quadratiques à trois composantes crémoniques. Si l'on désigne par e,

k, k' les substitutions linéaires

$$e - e^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_3 \\ x_3 & u_2 \\ u_1 & x_1 \\ u_2 & x_3 \\ u_3 & x_2 \end{vmatrix}, \quad k = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & -\tfrac{1}{4}K^{-2}x_2 \\ x_3 & x_3 \\ u_1 & u_1 \\ u_2 & -4K^2u_2 \\ u_3 & u_3 \end{vmatrix}, \quad k' = \begin{vmatrix} x_1 & -4K^2x_1 \\ x_2 & 4K^2x_2 \\ x_3 & x_3 - x_2 \\ u_1 & u_1 \\ u_2 & -(u_2+u_3) \\ u_3 & -4K^2+u_3 \end{vmatrix},$$

on a la proposition :

Théorème. — *Toute crémonienne quadratique à trois composantes crémoniques est de la forme $\alpha\xi\beta$ ou $\alpha\pi\beta$, α et β désignant des substitutions linéaires monistiques ou dualistiques, où*

$$\xi = \xi^{-1} = \rho e \varpi k e \rho = \begin{vmatrix} x_1 & r_1 r_2 \\ x_2 & r_2^2 \\ x_3 & r_1^2 - 4K^2u_3^2A \\ u_1 & -2\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \\ u_2 & \mathfrak{r}_1^2 + 4K^2u_3^2\mathfrak{A} \\ u_3 & \mathfrak{r}_2^2 \end{vmatrix}.$$

$$A = x_1^2 - x_2x_3, \qquad \mathfrak{A} = A - K^2x_2^2, \qquad K = \text{const.},$$

$$A_i = \frac{\partial A}{\partial x_i}, \qquad \mathfrak{A}_i = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_i}, \qquad r_i = (Au)_i, \qquad \mathfrak{r}_i = (\mathfrak{A}u)_i.$$

$$K, \quad K^{-1}, \quad K^2 - 1 \neq 0;$$

$$\pi = \pi^{-1} = \rho e \varpi e k' \varpi = \begin{vmatrix} x_1 & -r_1r_2 \\ x_2 & r_1^2 \\ x_3 & r_2^2 - 4K^2u_3^2A \\ u_1 & 2\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \\ u_2 & \mathfrak{r}_2^2 + 4K^2u_3^2\mathfrak{A} \\ u_3 & \mathfrak{r}_1^2 \end{vmatrix}$$

($\mathfrak{A} = A - K^2x_1^2$, le reste comme plus haut).

Quant aux éléments et aux facteurs fondamentaux, ils sont donnés par le Tableau ci-contre. J'appelle d'ailleurs *élément adhérent :*

A une courbe, le système formé par une tangente et le point de contact ;

A une droite, le système formé par la droite et un point de cette droite ;

A un point, le système formé par le point et une droite passant par le point.

Je donne aux côtés et aux sommets du triangle des coordonnées les noms indiqués sur la figure.

Pour	Les éléments fondamentaux sont les ∞ éléments adhérents à	Les facteurs fondamentaux sont
ζ	$\omega,\ \omega'\ \omega'',\ \Omega,\ \Omega',\ \Omega''$	$x_1,\ x_2,\ x_3$
ϖ	$\omega,\ \omega',\ \Omega,\ \Omega'$	$x_1,\ x_2$
ρ	$\omega,\ \Omega$	x_2
$\rho\,\mathrm{H}\,\rho$	$\omega,\ \Omega$	$x_2,\ u_3$
$\rho\,\mathrm{E}\,\varpi$	$\omega,\ \omega',\ \mathfrak{h}$ (1), $\Omega,\ \Omega'$	$x_1,\ x_2,\ u_3$
$\varpi\,\mathrm{E}\,\rho$	$\omega,\ \Omega,\ e x_2^2 + \mathrm{A} = 0$	$x_2,\ u_3,\ r_2$
$\varpi\,\mathrm{E}\,\varpi$	$\omega,\ \omega',\ \Omega,\ \Omega'\ e x_1^2 + x_2 x_3 = 0$	$x_2,\ u_3,\ r_1$
ξ	$\omega,\ \Omega,\ \mathrm{A} = 0,\ \mathrm{A} - \mathrm{K}^2 x_2^2 = 0$	$x_2,\ u_3,\ r_2$
π	$\omega,\ \Omega,\ \mathrm{A} = 0,\ \mathrm{A} - \mathrm{K}^2 x_1^2 = 0$	$x_2,\ u_3,\ r_1$

$$\mathrm{A} = x_1^2 - x_2 x_3, \qquad \mathrm{A}_i = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_i},$$

$$r_i = (\mathrm{A}\,u)_i, \qquad r_1 = \mathrm{A}_2 u_3 - \mathrm{A}_3 u_2, \qquad \ldots.$$

J'ai systématiquement laissé de côté, comme moins importantes au point de vue de la construction des groupes crémoniens quadratiques, les nombreuses propriétés géométriques des substitutions crémo-

(1) $\mathfrak{h}$ est le point situé sur Ω', dont les coordonnées sont 0, 4, 1.

niennes. J'ai négligé notamment les relations qui existent entre les éléments et connexes fondamentaux de la crémonienne s, et les connexes et éléments fondamentaux de s^{-1}. Ces relations sont tout à fait de même nature que celles qui existent entre les points et lignes fondamentales d'une substitution Cremona, les lignes et points fondamentaux de son inverse.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉNÉRALITÉS ET DÉFINITIONS.

1. La terminologie adoptée dans le présent Travail est celle de Clebsch-Lindemann (*Leçons sur la Géométrie, Connexes,* tome III de la traduction Benoist). Je renvoie à l'Ouvrage cité pour la définition des mots *élément, élément principal, situation réunie, connexe, coïncidence, coïncidence principale, couple de courbes,* etc.

Toutefois, comme je ne m'occupe que d'éléments principaux, le mot *élément* voudra dire élément *principal;* un connexe aura ainsi pour moi ∞^2 éléments, ceux de sa coïncidence principale. De même, à moins de stipulation contraire, des éléments infiniment voisins seront toujours supposés en situation réunie.

Un élément (x, u) formé par le point x d'une courbe et la tangente u en ce point *adhérera* ou *sera adhérent* à la courbe, laquelle à son tour sera *adhérente* ou *adhérera* à l'élément. De même tout élément (x, a) adhère à la droite fixe a, laquelle adhère à l'élément (x, a). Enfin tout élément (b, u) adhère au point fixe b, lequel à son tour adhère à l'élément. Il y a évidemment ∞ éléments adhérents à une courbe, à une droite, à un point.

Suivant l'usage, je désigne par $x, y, z, \ldots$ des points ayant respectivement pour coordonnées $x_i, y_i, z_i, \ldots (i = 1, 2, 3)$, et par $u, v, w_i, \ldots$ des droites ayant pour coordonnées $u_i, v_i, w_i, \ldots$. J'écrirai $f(x)$ au lieu de $f(x_1, x_2, x_3), \ldots$. Dans une forme à plusieurs séries de variables

$$P(x, y, \ldots, u, v, \ldots),$$

je *soulignerai* celles des variables qui seront considérées non comme

coordonnées, mais comme *paramètres*. La notation

$$P\left(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{y}, \ldots\right)$$

met en évidence les dimensions avec lesquelles figurent dans la forme P mixte les variables homogènes x_i, y_i, ... Enfin, quand aucune ambiguïté ne sera possible, je désignerai une forme mixte simplement par

$$\left(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{y}, \ldots, \overset{\gamma}{u}, \overset{\delta}{v}, \ldots\right),$$

par exemple.

Il va sans dire que nous supposerons toujours, à moins de stipulations contraires, entre les six variables x_i et u_i la relation

$$\sum_i u_i x_i = 0.$$

Toutes nos formules ne seront exactes que sous le bénéfice de cette relation.

2. Soit une substitution de contact (*voir*, pour la définition, l'Ouvrage précité de Clebsch-Lindemann, t. III, p. 465)

$$s = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\left(\overset{a}{x}, \overset{b}{u}\right) \\ u_i & \psi_i\left(\overset{c}{x}, \overset{d}{u}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ u_i & v_i \end{vmatrix}, \qquad \begin{matrix} \rho y_i = \varphi_i, \\ \sigma v_i = \psi_i \end{matrix}$$

(ρ, σ = facteurs de proportionnalité; φ_i, ψ_i = formes rationnelles et entières.)

Si l'on a réciproquement

$$\rho' x_i = \theta_i\left(\overset{a'}{y}, \overset{b'}{v}\right), \qquad \sigma' u_i = \eta_i\left(\overset{c'}{y}, \overset{d'}{v}\right)$$

(ρ', σ' = facteurs de proportionalité),

la substitution s sera *birationnelle* et l'on posera par définition

$$s^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \theta_i\left(\overset{a'}{x}, \overset{b'}{u}\right) \\ u & \eta_i\left(\overset{c'}{x}, \overset{d'}{u}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_i & x_i \\ v_i & u_i \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{Vmatrix}.$$

Il est évident que $\theta_i(\varphi, \psi)$ et $\eta_i(\varphi, \psi)$ sont respectivement proportionnels à x_i et u_i.

Une substitution, qui est à la fois birationnelle et de contact

$$s = \left\{ \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\},$$

sera appelée *crémonienne*, parce qu'elle se réduit à une substitution ordinaire Cremona d'ordre a, si l'entier b est nul. Une crémonienne devient *crémonique* si l'un au moins des quatre entiers a, b, c, d est zéro ou un. La crémonienne est *linéaire monistique* ou *dualistique* (*voir* ma Note dans les *Comptes rendus* du 8 février 1886 ou mon Mémoire du *Journal de Mathématiques*, p. 64; 1887) si aucun des entiers a, b, c, d ne dépasse l'unité; la crémonienne est *quadratique* si aucun de ces quatre entiers ne dépasse deux. Je sous-entendrai souvent *substitution* devant crémonienne et *substitution linéaire* devant monistique ou dualistique.

3. Soit une crémonienne

$$s = \left| \begin{matrix} x_i & \varphi_i \\ u_i & \psi_i \end{matrix} \right|; \qquad s^{-1} = \left| \begin{matrix} x_i & \theta_i \\ u_i & \eta_i \end{matrix} \right|.$$

L'élément (y, v) dont les coordonnées sont $\varphi_i(x, u)$ et $\psi_i(x, u)$ sera le *transformé par s* de l'élément (x, u) et sera désigné par $s[(x, u)]$.

Soit (x, u) l'élément courant du connexe C: le lieu géométrique des éléments $s[(x, u)]$ sera le connexe $s[C]$, transformé par s du connexe C.

Soit $P(x, u)$ une forme mixte, je poserai

$$s[P(x, u)] = P(\varphi, \psi).$$

Comme on a identiquement, à un facteur de proportionnalité près (**2**),

$$P(x, u) = P[\theta(\varphi, \psi), \eta(\varphi, \psi)];$$

on voit que, si $P = 0$ est l'équation du connexe C,

$$s^{-1}[P(x, u)] = P(\theta, \eta) = 0$$

est l'équation du connexe $s[C]$.

Soient une courbe c, (x, u) l'élément courant adhérent à cette courbe. Par les propriétés connues des substitutions de contact, on voit que $s[(x, u)]$ est l'élément courant adhérent à une certaine courbe, que j'appelle *transformée de c par s* et que je représente par $s[c]$. Si

$$p(x) = q(u) = 0$$

sont les équations de la courbe c en coordonnées-points x_i et coordonnées-lignes u_i, on voit aisément qu'il suffit d'éliminer successivement entre les trois équations

$$s^{-1}[p(x)] = s^{-1}[q(u)] = p(\theta) = q(\eta) = \sum_i u_i x_i = 0$$

x_i et u_i pour avoir l'équation de $s[c]$ successivement en coordonnées-points et coordonnées-lignes.

4. Soient deux crémoniennes

$$s' = \begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(x, u) \\ u_i & \psi'_i(x, u) \end{vmatrix}, \qquad s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u) \\ u_i & \psi_i(x, u) \end{vmatrix};$$

la substitution

$$s's = \begin{vmatrix} x_i & s[\varphi'_i] \\ u_i & s[\psi'_i] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(\varphi, \psi) \\ u_i & \psi'_i(\varphi, \psi) \end{vmatrix}$$

sera *par définition* le *produit $s's$* de s' par s, *dans l'ordre indiqué de facteurs.*

Au point de vue géométrique $s's$ équivaut aux deux substitutions s et s' successivement faites (dans l'ordre indiqué); s et s' étant de contact changent par définition des éléments infiniment voisins en situation réunie en des éléments infiniment voisins en situation réunie; il en est donc de même de $s's$, qui, par suite, est de contact.

Posons $(y, v) = s[(x, u)]$ et ensuite $(z, w) = s'[(y, v)]$, on aura, d'après ce qui précède,

$$(z, w) = s's[(x, u)].$$

L'inverse s'^{-1} de la crémonienne s' est évidemment crémonienne et transforme (z, w) en l'élément *unique* (y, v), et s^{-1} transforme (y, v) en l'élément *unique* (x, u); la substitution $s^{-1}s'^{-1} = (s's)^{-1}$ équivaut aux substitutions s'^{-1} et s^{-1} successivement faites dans l'ordre indiqué et change (z, w) en l'élément unique (x, u); donc $s's$ est birationnelle et, étant déjà de contact, est crémonienne comme ses *composantes* s' et s. En résumé :

Théorème. — *Les crémoniennes forment un* groupe crémonien.

5. Posons $(y, v) = s[(x, u)]$ et par suite $(x, u) = s^{-1}[(y, v)]$, s étant la crémonienne

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \eta_i \\ u_i & \psi_i \end{vmatrix}, \qquad s^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \theta_i \\ u_i & \tau_i \end{vmatrix}.$$

J'appelle équation primordiale ou simplement *primordiale* de la crémonienne toute équation algébrique, telle que

$$f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}\right) = 0, \qquad f_1\left(\overset{m_1}{x}, \overset{q_1}{v}\right) = 0, \qquad f_2\left(\overset{p_2}{u}, \overset{n_2}{y}\right) = 0, \qquad f_3\left(\overset{p_3}{u}, \overset{q_3}{v}\right) = 0,$$

dont la crémonienne entraîne l'existence entre *une* série de coordonnées de (x, u) et *une* série de coordonnées de (y, v). J'appelle plus spécialement

$f = 0$, primordiale puncto-ponctuelle de s et de s^{-1},

$f_1 = 0$, » $\begin{cases} \text{puncto-linéaire de } s, \\ \text{linéo-ponctuelle de } s^{-1}, \end{cases}$

. . . . . .

. . . . . .

6. Soit (x, u) l'un quelconque des ∞ éléments adhérents à un certain point x du plan et posons $(y, v) = s[(x, u)]$. Les ∞ points y sont

situés sur la courbe d'ordre n (*voir* **1** du Mémoire pour les explications des lettres *soulignées*)

$$f\left(\overset{m}{\underline{x}}, \overset{n}{y}\right) = 0$$

et les ∞ droites v touchent la courbe de classe q_1

$$f\left(\overset{m_1}{\underline{x}}, \overset{q_1}{v}\right) = 0.$$

Deux éléments (x, u) infiniment voisins sont en situation réunie; puisque s est crémonienne, il en est de même de deux éléments infiniment voisins $(y, v) = s[(x, u)]$. En d'autres termes, les équations

$$f\left(\overset{m}{\underline{x}}, \overset{n}{y}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_1\left(\overset{m_1}{\underline{x}}, \overset{q_1}{v}\right) = 0$$

représentent, l'une en coordonnées-points y_i, l'autre en coordonnées-lignes v_i, *la même courbe d'ordre* m et de classe q_1, ou plutôt, en considérant x_i comme des paramètres variables, le même *réseau* de ∞^2 courbes d'ordre m et de classe q_1. J'appelle ce réseau *afférent* à la substitution s^{-1} et *ponctuel* comme se rapportant aux divers points x du plan. Je le désigne par la notation

$$R_p^{s^{-1}},$$

affectant la lettre R comme indice supérieur du nom de la substitution et comme indice inférieur de la première lettre du mot *ponctuel*.

De même, les deux primordiales

$$f_1\left(\overset{m_1}{x}, \overset{a_1}{\underline{v}}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_3\left(\overset{p_3}{u}, \overset{q_3}{\underline{v}}\right) = 0,$$

par exemple, représentent un réseau d'ordre m_1 et de classe p_3, que j'appelle *réseau linéaire* (se rapportant aux diverses droites v du plan) de la crémonienne s et que je désigne par la notation

$$R_l^s.$$

En résumé, la crémonienne s aura deux réseaux

$$R_p^s \text{ d'ordre } m \text{ et de classe } p_2,\ f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}\right) = f_2\left(\overset{p_2}{u}, \overset{n_2}{y}\right) = 0,$$

$$R_l^s \quad » \quad m_1 \quad » \quad p_3,\ f_1\left(\overset{m_1}{x}, \overset{q_1}{v}\right) = f_3\left(\overset{p_3}{u}, \overset{q_3}{v}\right) = 0.$$

La crémonienne s^{-1} aura deux réseaux

$$R_p^{s^{-1}} \text{ d'ordre } n \text{ et de classe } q_1,\ f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}\right) = f_1\left(\overset{m_1}{x}, \overset{q_1}{v}\right) = 0,$$

$$R_l^{s^{-1}} \quad » \quad n_2 \quad » \quad q_3,\ f_2\left(\overset{p_2}{u}, \overset{n_2}{y}\right) = f_3\left(\overset{p_3}{u}, \overset{q_3}{v}\right) = 0.$$

7. Nous avons raisonné comme si entre deux mêmes séries de coordonnées de (x, u) et de (y, v) n'existait qu'une seule primordiale. Supposons maintenant qu'il y ait deux primordiales puncto-ponctuelles par exemple

$$f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'\left(\overset{m'}{x}, \overset{n'}{y}\right) = 0.$$

Si x est donné, y est l'un des nn' points d'intersection des deux courbes d'ordres n et n' respectivement

$$(1) \qquad f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}\right) = 0, \qquad f'\left(\overset{m'}{x}, \overset{n'}{y}\right) = 0;$$

y_i ne dépend donc que des x_i, et la crémonienne

$$s = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\left(\overset{a}{x}, \overset{b}{u}\right) \\ u_i & \psi_i\left(\overset{c}{x}, \overset{d}{u}\right) \end{vmatrix}$$

devient crémonique puisque u manque dans φ_i et $b = 0$.

Pour que s restât crémonienne, il faudrait que les deux courbes (1) eussent ∞ points communs, c'est-à-dire fussent décomposables, avec une partie commune. Alors on aurait

$$f = \varpi(x, y)\,F(x, y),$$
$$f' = \varpi'(x, y)\,F(x, y)$$

et c'est

$$F(x, y) = 0$$

qu'il faudrait prendre pour véritable et unique primordiale puncto-ponctuelle.

8. Si l'un des réseaux d'une crémonienne s, le réseau ponctuel R_p^s par exemple, se décompose en un système de droites (ou de points), il n'est plus représentable par *une seule* équation en coordonnées-lignes (ou coordonnées-points); en ce cas, la primordiale linéo-ponctuelle (ou puncto-ponctuelle) de s ne peut plus être unique et s devient crémonique.

9. Existe-t-il, en général, des primordiales pour une crémonienne donnée? Il est aisé d'en former. Soit une crémonienne

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u) \\ u_i & \psi_i(x, u) \end{vmatrix}.$$

Posons

$$(1) \qquad \rho y_i = \varphi_i(x, u),$$

$$(2) \qquad \sigma v_i = \psi_i(x, u),$$

$$(3) \qquad \sum_i u_i x_i = 0.$$

$\rho, \sigma =$ facteurs de proportionnalité.

Nous obtiendrons, en éliminant entre (3) et les trois équations,

(1), ρ et u_i,	une primordiale	puncto-ponctuelle,
(1), ρ et x_i,	»	linéo-ponctuelle,
(2), σ et u_i,	»	puncto-linéaire,
(2), σ et x_i,	»	linéo-linéaire.

Par suite *une crémonienne possédera en général les deux réseaux* linéaire et ponctuel dont nous avons montré plus haut les propriétés.

10. Réciproquement, d'une primordiale, puncto-ponctuelle par exemple, $f(x, y) = 0$, on peut remonter à la crémonienne.

En effet, on sait (*Leçons sur la Géométrie*, t. III de la traduction Benoist, p. 466 et suiv.) que (y, v) est l'un des éléments adhérents à la fois aux deux courbes

$$f(\underline{x}, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(\underline{x} + \underline{dx}, y) = \sum_i dx_i \frac{\partial f(\underline{x}, y)}{\partial x_i} = 0,$$

avec

$$\sum_i u_i dx_i = 0.$$

Éliminons y_i entre les trois équations

$$f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_i w_i y_i = 0,$$

en tenant compte de

$$\sum_i u_i x_i = \sum_i u_i dx_i = 0;$$

d'où

$$u_i \text{ proportionnel à } (x\,dx)_i,$$

$$(x\,dx)_1 = x_2 dx_3 - x_3 dx_2, \qquad \ldots.$$

Le résultat

$$\left(\overset{n^2}{w}, u, x\right) = 0$$

de l'élimination donne le produit des n^2 points d'intersection de

$$f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0,$$

en coordonnées-lignes w_i.

Parmi ces n^2 points se trouve y dont l'équation est

$$w_y = \sum_i w_i \varphi_i(x, u) = 0.$$

Le facteur w_y doit se détacher par conséquent de $\left(\overset{n^2}{w}, u, x\right)$ et les fonctions φ_i se trouvent déterminées.

Opérons de même sur la primordiale puncto-linéaire, nous déterminerons les fonctions ψ_i, et la crémonienne s sera construite.

D'ailleurs, dès que y_i, c'est-à-dire φ_i est obtenue, on a v_i, c'est-à-dire ψ_i en remarquant que v_i est proportionnelle à $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i}$, c'est-à-dire à

$$\frac{\partial f(x, \varphi)}{\partial x_i}.$$

11. Théorème. — *Le réseau ponctuel (ou linéaire) du produit $s's$ de deux crémoniennes est le transformé par s^{-1} du réseau ponctuel (ou linéaire) de s'.*

J'appelle d'ailleurs réseau transformé $s^{-1}[R_p^{s'}]$ le réseau des transformées par s^{-1} des ∞^2 courbes de $R_p^{s'}$.

Soient σ et σ' deux crémoniennes quelconques, x un point fixe d'ailleurs *quelconque* du plan. Les ∞ éléments $\sigma[(x, u)]$, pour u variable, adhèrent à une certaine courbe d'ailleurs *quelconque* de $R_p^{\sigma^{-1}}$ (**6**) et les ∞ éléments $\sigma'\sigma[(x, u)]$ adhèrent (**5**) à la transformée par σ' de cette courbe, laquelle transformée est une certaine courbe d'ailleurs *quelconque* de $\sigma'[R_p^{\sigma^{-1}}]$. Mais (**6**) les ∞ éléments $\sigma'\sigma[(x, u)$ adhèrent à une certaine courbe d'ailleurs *quelconque* parmi les ∞^2 courbes de $R_p^{(\sigma'\sigma)^{-1}}$; donc, en exprimant par l'égalité des symboles la coïncidence des réseaux,

$$R_p^{(\sigma'\sigma)^{-1}} = \sigma'[R_p^{\sigma^{-1}}].$$

Les crémoniennes σ' et σ sont quelconques : appelons s^{-1} la crémonienne σ' et s'^{-1} la crémonienne σ, il viendra l'égalité

$$R_p^{s's} = s^{-1}[R_p^{s'}],$$

qui démontre le théorème.

Il suffit de raisonner comme ci-dessus sur les réseaux R_l pour établir que

$$R_l^{s's} = s^{-1}[R_l^{s'}].$$

On aura seulement à considérer, au lieu d'un point fixe quelconque x du plan, une droite fixe u quelconque.

Soient

$$f'(x, \underline{y}) = 0, \qquad F'(u, \underline{y}) = 0$$

les équations en coordonnées-points x_i et coordonnées-lignes u_i du réseau R_p^e; les équations du réseau $R_p^{e,s}$ en coordonnées-points et coordonnées-lignes s'obtiendront en éliminant respectivement u_i ou x_i entre les trois équations

$$f'(\varphi, \underline{y}) = F'(\psi, \underline{y}) = \sum_i u_i x_i = 0,$$

la crémonienne s étant

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u) \\ u_i & \psi_i(x, u) \end{vmatrix}.$$

12. Soit s une crémonienne ; soient α et β deux linéaires quelconques monistiques ou dualistiques, la substitution

$$\alpha s \beta$$

sera évidemment crémonienne, comme s, α et β, et *par définition* sera *équivalente* à s. Deux crémoniennes équivalentes à une troisième sont équivalentes entre elles. Parmi les crémoniennes en nombre infini équivalentes à s, nous prendrons comme *forme canonique* de s la crémonienne qui a l'expression la plus simple, grâce à un choix convenable des linéaires α et β.

Ce qui précède s'applique aux crémoniennes en général, les entiers a, b, c, d étant quelconques. Je vais passer maintenant aux crémoniennes linéaires, où a, b, c, $d = 1$, et aux crémoniennes *quadratiques*, où a, b, c, $d = 2$.

13. Toute linéaire est évidemment crémonique; comme je l'ai démontré ailleurs (*Journal de Mathématiques*, p. 74; 1887), une linéaire ne peut être que monistique

$$\alpha = \begin{vmatrix} x & A[x] \\ u & A'^{-1}[u] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \sum_j a_{ij} x_j \\ u_i & \sum_j \alpha_{ij} u_j \end{vmatrix},$$

(α_{ij} élément du système adjoint des a_{ij}), ou dualistique,

$$b = \begin{vmatrix} x & \mathrm{B}[u] \\ u & \mathrm{B}^{-1}[x] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \sum_j b_{ij} u_j \\ u_i & \sum_j \beta_{ij} x_j \end{vmatrix},$$

(β_{ij} élément du système adjoint des b_{ij}; a_{ij}, b_{ij} = const. de déterminant $\neq 0$).

14. Les crémoniques quadratiques ont l'une des quatre formes suivantes :

$$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{Bmatrix},$$

si l'on a égard au théorème de la page 71 du *Journal de Mathématiques*, 1887, ainsi conçu :

Si l'une des deux séries de variables x_i et u_i entre linéairement (ou manque) dans l'une des séries de fonctions φ_i et ψ_i, qui définissent s supposée de contact, cette même série de variables manque (ou entre linéairement) dans l'autre série de fonctions.

Une crémonique

$$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} = \lambda = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\left(\overset{2}{x}\right) \\ u_i & \sum_j u_j \Phi_{ij}\left(\overset{2}{x}\right) \end{vmatrix},$$

où Φ_{ij} est le coefficient de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ dans le développement du déterminant des dérivées $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$, et la substitution ternaire

$$\begin{vmatrix} t_i & \varphi_i(t) \end{vmatrix}$$

une substitution Cremona.

Si l'on désigne par $\mathfrak{L}$ la dualistique d'échange

$$\mathfrak{L} = \begin{vmatrix} x_i & u_i \\ u_i & x_i \end{vmatrix} = \mathfrak{L}^{-1},$$

on voit aisément que toute crémonique quadratique de la forme

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix} = \mathfrak{L}\lambda\mathfrak{L}, \qquad \begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix} = \lambda\mathfrak{L}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{Bmatrix} = \mathfrak{L}\lambda.$$

En résumé, toute *crémonique quadratique est équivalente à une crémonique de la forme* λ.

Il suffira donc de construire la forme canonique (**12**) de λ.

Remarque. — On voit aisément que l'inverse d'une crémonique est aussi une crémonique.

15. Je réserve plus particulièrement le nom de *crémonienne quadratique* à la substitution

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix}.$$

Dans ce qui suit, j'abrégerai le langage en disant *crémonique* et *crémonienne* au lieu de crémonique quadratique et crémonienne quadratique.

Je me bornerai, pour une crémonique ou crémonienne, à donner sa forme canonique, puisqu'il suffira, pour produire la substitution, de multiplier devant et derrière la forme canonique par des linéaires convenables; pour cette forme canonique il suffira (**10**) de donner une primordiale.

DEUXIÈME PARTIE.

FORME CANONIQUE D'UNE CRÉMONIQUE : ÉLÉMENTS, FACTEURS. CONNEXES FONDAMENTAUX.

16. Il suffira de construire la forme canonique de la crémonique λ (**14**). Soit

$$\lambda = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x) \\ u_i & \ldots\ldots \end{vmatrix}.$$

La primordiale puncto-linéaire de λ

$$\sum_i v_i \varphi_i(x) = 0$$

représente pour v constante, mais quelconque, une des ∞^2 courbes de R_l^λ, lequel réseau est un réseau de ∞^2 coniques passant par trois points fixes, puisque la ternaire

$$\begin{vmatrix} l_i & \varphi_i(l) \end{vmatrix}$$

est une substitution Cremona.

Trois cas sont à distinguer :

I. Les trois points sont distincts. On peut amener ces trois points à coïncider avec les trois points

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad x_2 = x_3 = 0, \qquad x_3 = x_1 = 0,$$

grâce à la multiplication de λ par une monistique qui équivaut, comme on sait, à un changement de coordonnées. Eu égard à l'équivalence. on peut donc écrire

$$\varphi_i = a_{i1} x_2 x_3 + a_{i2} x_3 x_1 + a_{i3} x_1 x_2.$$

(a_{ij} = const. de déterminant $\neq 0$).

Alors

$$\sum v_i \varphi_i = \sum_i (a_{i1} x_2 x_3 + a_{i2} x_3 x_1 + a_{i3} x_1 x_2) v_i$$

$$= x_2 x_3 \sum_i a_{i1} v_i + x_3 x_1 \sum_i a_{i2} v_i + x_1 x_2 \sum_i a_{i3} v_i.$$

Remplacer $\sum_i a_{ij} v_i$ par v_j, c'est multiplier encore λ par devant par une monistique a (effectuer le produit $a\lambda$), ce qui est licite au point de vue de l'équivalence. Alors la primordiale devient

$$v_1 x_2 x_3 + v_2 x_3 x_1 + v_3 x_1 x_2 = 0,$$

et la crémonique prend sa *forme canonique* (**14** et **12**).

$$\frac{\zeta}{\xi} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 x_3 \\ x_2 & x_3 x_1 \\ x_3 & x_1 x_2 \\ u_i & x_i^2 u_i \end{vmatrix} = \frac{\zeta}{\xi}^{-1}.$$

II. Deux points fixes sont infiniment voisins sur une droite et le troisième distinct. Appelons une fois pour toutes (ω, Ω) l'élément

$$x_1 = x_2 = u_1 = u_3 = 0,$$

et ω' le point

$$x_1 = x_3 = 0.$$

Nous pouvons, eu égard à l'équivalence, supposer les deux points fixes infiniment voisins confondus en $\omega(x_1 = x_2 = u_3 = 0)$ sur la droite $\Omega(u_1 = x_2 = u_3 = 0)$, et le troisième point fixe situé en ω'. Alors

$$\varphi_i = a_{i1} x_2 x_3 + a_{i12} x_1 x_2 + a_{i11} x_1^2,$$

$$0 = \sum_i v_i \varphi_i = x_2 x_3 \sum_i a_{i1} v_i + x_1 x_2 \sum_i a_{i12} v_i + x_1^2 \sum_i a_{i11} v_i.$$

Remplaçons encore, ce qui est licite au point de vue de l'équiva-

lence, $\sum_i a_{i1} v_i$ par v_3, $\sum_i a_{i12} v_i$ par v_1, $\sum_i a_{i11} v_i$ par v_2, il vient la forme canonique ϖ pour λ,

$$\varpi = \varpi^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 x_2 \\ x_2 & x_1^2 \\ x_3 & x_2 x_3 \\ u_1 & -x_1 r_1 \\ u_2 & x_2^2 u_2 \\ u_3 & x_1^2 u_3 \end{vmatrix}, \qquad r_1 = x_2 u_2 - x_3 u_3.$$

III. Les trois points fixes sont confondus, et l'on peut supposer qu'ils le sont au point ω de la conique $A = x_1^2 - x_2 x_3 = 0$ et situés tous trois sur la conique; cette supposition, en effet, ne change pas l'équivalence. Alors

$$\varphi_i = a_i x_1 x_2 + b_i x_2^2 + c_i (x_1^2 - x_2 x_3),$$

$$0 = \sum_i v_i \varphi_i = x_1 x_2 \sum_i a_i v_i + x_2^2 \sum_i b_i v_i + (x_1^2 - x_2 x_3) \sum_i c_i v_i.$$

Nous pouvons encore, eu égard à l'équivalence, écrire v_1 au lieu de $\sum_i a_i v_i$, v_2 au lieu de $\sum_i b_i v_i$, v_3 enfin au lieu de $\sum_i c_i v_i$. Alors il vient la primordiale

$$v_1 x_1 x_2 + v_2 x_2^2 + v_3 (x_1^2 - x_2 x_3) = 0,$$

et, pour λ, la forme canonique

$$\rho = \rho^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 x_2 \\ x_2 & x_2^2 \\ x_3 & x_1^2 - x_2 x_3 \\ u_1 & x_2 r_2 \\ u_2 & x_1^2 u_3 - x_2^2 u_2 \\ u_3 & x_2^2 u_3 \end{vmatrix}, \qquad -r_2 = x_2 u_1 + 2 x_1 u_3.$$

On peut remarquer que, si l'on pose

$$A_i = \frac{\partial A}{\partial x_i}, \qquad r_1 = (Au)_1 = A_2 u_3 - A_3 u_2, \qquad \ldots, \qquad r_2 = (Au)_2.$$

Nous avons ainsi le théorème :

Théorème. — *Toute crémonique est de la forme* $\alpha\sigma\beta$, α *et* β *désignant des linéaires, et* σ *l'une quelconque des trois formes canoniques* ζ, ϖ, ρ.

17. Soit s une crémonienne quelconque, quadratique ou non, crémonique ou non. Un élément (a, b) sera *fondamental* pour s, s'il existe plus d'un élément $s[(a, b)]$. Il faut évidemment pour cela, si

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u) \\ u_i & \psi_i(x, u) \end{vmatrix},$$

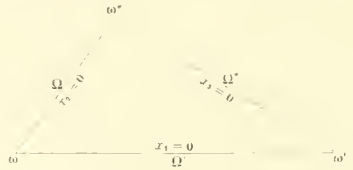
que l'on ait

$$\varphi_i = 0, \qquad \text{ou} \qquad \psi_i = 0, \qquad \text{ou} \qquad \varphi_i = \psi_i = 0$$

pour l'élément (a, b).

Un connexe C est *fondamental* pour s, si s transforme les ∞^2 éléments de C en ∞ au plus. Un *facteur fondamental* est une forme mixte qui donne annulée l'équation d'un connexe fondamental.

18. Pour la commodité du langage, je donne aux sommets et aux côtés du triangle des coordonnées les noms indiqués sur la figure ci-dessous.



19. On voit aisément que la canonique ζ (**16**)

$$\zeta = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i \\ u_i & \psi_i \end{vmatrix} = \zeta^{-1}, \qquad (y, v) = \zeta[(x, u)]$$

a pour éléments fondamentaux :

1° Les ∞ éléments adhérents à l'une des trois droites Ω, Ω', Ω'', éléments qui annulent ψ_i;

2° Les ∞ éléments adhérents à l'un des trois points ω, ω', ω'', éléments qui annulent φ_i et ψ_i.

Si (x, u) adhère à Ω, Ω', Ω'', y est respectivement placé en ω', ω'', ω, et v est indéterminée, $\psi_i = 0$. Donc, ζ transforme *chacun* des ∞ éléments adhérents à Ω, Ω', Ω'' en les ∞ éléments adhérents respectivement à ω', ω'', ω.

Si (x, u) adhère à ω, ω', ω'', y est situé en un certain point de Ω'', Ω, Ω', et v est indéterminé autour de ce point.

Donc, ζ transforme les ∞ éléments adhérents à ω, ω', ω'' en les ∞^2 éléments des connexes $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ respectivement. Comme $\zeta = \zeta^{-1}$, x_2, x_3, x_1 sont les facteurs fondamentaux de ζ, en vertu même de la définition.

Lemme. — *Soit s une crémonienne quelconque, $P(x, u)$ une forme mixte irréductible; si $P(\varphi, \psi)$ se décompose en un produit de plusieurs facteurs, tous ces facteurs, sauf un au plus, sont fondamentaux pour s.*

Soit, par exemple,

$$s[P(x, u)] = P(\varphi, \psi) = Q^\beta \Pi^\alpha \Pi_1^{\alpha_1} \ldots :$$

appelons p, q, π, π_1, ... les connexes $P = 0$, $Q = 0$, $\Pi = 0$, ... Si Q n'est pas fondamental pour s, tandis que (x, u) parcourt le connexe q, $s[(x, u)]$ parcourt le connexe p et le parcourt tout entier, puisqu'il est irréductible. Cela résulte (**3**) de ce que $s[P(x, u)] = 0$ est l'équation du connexe $s^{-1}[p]$, lieu géométrique de l'élément $s^{-1}[(x, u)]$.

Si maintenant Π n'est pas fondamental pour s, tandis que (x, u) parcourt π, $s[(x, u)]$ parcourt de nouveau le connexe p. Alors, tandis que (x, u) parcourt p, $s^{-1}[(x, u)]$ parcourt à la fois q et π; ces connexes coïncideraient donc, et Q ne différerait de Π que par une constante facteur, ce qui est contre l'hypothèse.

Au contraire, si Π est fondamental, tandis que (x, u) parcourt π, $s[(x, u)]$ vient coïncider avec ∞ au plus éléments de p.

Appliquons le lemme à ζ, il vient le théorème suivant :

Théorème. — *Soit* P *une forme mixte irréductible; il ne peut se séparer de* $\zeta[P]$ *d'autres facteurs que* x_1, x_2, x_3 : *il faut et il suffit pour cela que le connexe* $P = 0$ *contienne les* $\varkappa$ *éléments adhérents respectivement à* $\omega'', \omega', \omega$.

20. Passons maintenant à l'étude de

$$\varpi = \varpi^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 x_2 \\ x_2 & x_1^2 \\ x_3 & x_2 x_3 \\ u_1 & -x_1 v_1 \\ u_2 & x_2^2 u_2 \\ u_3 & -x_1^2 u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u) \\ u_i & \psi_i(x, u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ u_i & v_i \end{vmatrix}.$$

Les éléments fondamentaux de ϖ sont :

Les $\varkappa$ éléments adhérents à Ω et à Ω' respectivement, $\psi_i = 0$:

Les $\varkappa$ éléments adhérents à ω et à ω' respectivement, $\varphi_i = \psi_i = 0$.

Si (x, u) adhère à Ω ou Ω', y est en ω' ou en ω, et v est indéterminé autour de y. Si (x, u) adhère à ω', y est en un certain point de Ω, et v est indéterminé autour de ce point. Si (x, u) adhère à ω, y est en ω, et v est indéterminé autour de y.

Étudions enfin les éléments en nombre infini $\varpi[(\omega, \Omega)]$; soit (y, v) l'un d'eux; $\varpi[(y, v)] = (\omega, \Omega)$, puisque $\varpi = \varpi^{-1}$. Il faut donc avoir

$$0 = y_1 y_2 = y_1^2 = y_1(y_3 v_3 - y_2 v_2) = y_1^2 v_3.$$

L'élément (y, v) est donc l'un quelconque des $\varkappa^2$ éléments du connexe $x_1 = 0$.

La discussion précédente et le lemme du n° **19** nous conduisent au théorème suivant :

Théorème. — *Soit* $P(x, u)$ *une forme irréductible en* x_i *et* u_i ; *il ne peut se séparer de* $\varpi[P(x, u)]$ *que les facteurs fondamentaux* x_1 *et* x_2 *de* ϖ ; *pour qu'il se sépare du facteur* x_2, *il faut et il suffit que le connexe* $P = 0$ *contienne les* $\varkappa$ *éléments adhérents à* ω' ; *pour*

qu'il se sépare du facteur x_1, il faut et il suffit que le connexe $P = 0$ *contienne l'élément* (ω, Ω).

J'appelle une fois pour toutes *élément focal,* ou simplement le *focal*, l'élément (ω, Ω).

21. Passons à la canonique ρ

$$\rho = \rho^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 x_2 \\ x_2 & x_2^2 \\ x_3 & x_1^2 - x_2 x_3 \\ u_1 & x_2 r_2 \\ u_2 & x_1^2 u_3 - x_2^2 u_2 \\ u_3 & x_2^2 u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i \\ u_i & \psi_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ u_i & v_i \end{vmatrix}.$$

Les éléments fondamentaux de ρ sont les éléments qui adhèrent à ω ou à Ω. Une discussion analogue aux précédentes montre que x_2 est le seul facteur fondamental de ρ, et conduit au théorème suivant :

Théorème. — *Soit* $P(x, u)$ *une forme irréductible mixte; il ne peut se séparer de* $\rho[P(x, u)]$ *que le facteur* x_2; *il faut et il suffit pour cela que le connexe* $P = 0$ *contienne l'élément focal.*

22. Considérons maintenant une crémonique quelconque qui sera (**16**), α et β désignant des linéaires monistiques ou dualistiques

$$\beta\sigma\alpha, \quad \sigma = \zeta, \quad \varpi \quad \text{ou} \quad \rho.$$

On s'assure aisément que les éléments fondamentaux et les connexes fondamentaux de $\beta\sigma\alpha$ sont les transformés par α^{-1} des éléments et des connexes fondamentaux de σ.

Une monistique équivaut, comme on sait, à un changement de coordonnées; une dualistique, à un changement de coordonnées combiné avec une transformation par polaires réciproques par rapport à une certaine conique de base. Nous sommes donc en mesure de déterminer

les éléments fondamentaux et les connexes fondamentaux d'une crémonique quelconque.

TROISIÈME PARTIE.

DÉCOMPOSITION DES CRÉMONIENNES EN CRÉMONIQUES.

23. Une crémonienne ($a = b = c = d = 2$) a pour inverse une autre crémonienne; en effet, une linéaire ou une crémonique a pour inverse une linéaire ou une crémonique, et nous excluons par hypothèse toute substitution où a, b, c ou d serait > 2.

Prenons donc une crémonienne

$$s = \begin{vmatrix} x & \varphi_i(\overset{2}{x}, \overset{2}{u}) \\ u_i & \psi_i(\overset{2}{x}, \overset{2}{u}) \end{vmatrix}, \qquad s^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \theta_i(\overset{2}{x}, \overset{2}{u}) \\ u_i & \eta_i(\overset{2}{x}, \overset{2}{u}) \end{vmatrix}.$$

Posons

$$(1) \qquad \alpha y_i = \varphi_i(x, u),$$

$$(2) \qquad \beta v_i = \psi_i(x, u);$$

d'où, par suite aussi,

$$(3) \qquad \gamma x_i = \theta_i(y, v),$$

$$(4) \qquad \delta u_i = \eta_i(y, v),$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta =$ facteurs de proportionnalité.

Éliminons respectivement :

α et u_i entre les trois équations (1) et $\sum_i u_i x_i = 0$;

γ et v_i entre les trois équations (3) et $\sum_i v_i y_i = 0$.

Soient $p(\overset{1}{x}, \overset{2}{y})$ et $q(\overset{2}{x}, \overset{1}{y}) = 0$ les résultats des deux éliminations. On obtient ainsi une double primordiale puncto-ponctuelle, et, comme s est crémonienne par hypothèse et non crémonique, il faut (**7**) que les deux courbes

$$p(\overset{1}{\underline{x}}, \overset{2}{y}) = 0, \qquad q(\overset{2}{\underline{x}}, \overset{1}{y}) = 0$$

aient une partie commune. La conique $p = 0$ ne peut se décomposer, pour x quelconque, en un couple de droites (**8**); donc

$$q\left(\overset{2}{x}, \overset{4}{y}\right) = p\left(\overset{4}{x}, \overset{2}{y}\right)\pi\left(\overset{-2}{x}, \overset{2}{y}\right);$$

chassant les dénominateurs de π, il vient, π n'ayant plus la même signification,

$$\mu\left(\overset{m}{x}\right)q\left(\overset{2}{x}, \overset{4}{y}\right) = p\left(\overset{4}{x}, \overset{2}{y}\right)\pi\left(\overset{m-2}{x}, \overset{2}{y}\right);$$

m étant un entier ≥ 2, et μ n'ayant aucun facteur commun avec les coefficients des puissances et produits des y_i dans π. Donc μ divise p, et $m \leq 4$. On ne peut ainsi faire que les hypothèses $m = 4, 3, 2$.

$m = 4$. — $p = \left(\overset{4}{x}\right)\left(\overset{2}{y}\right)$; pour x quelconque, y ne serait pas quelconque dans le plan, mais situé sur la conique $\left(\overset{2}{y}\right) = 0$, résultat absurde.

$m = 3$. — $p = \left(\overset{3}{x}\right)\left(\overset{1}{x}, \overset{2}{y}\right)$. La primordiale

$$\left(\overset{1}{x}, \overset{2}{y}\right) = 0$$

contiendrait x_i à la première dimension, le réseau R_p^s se composerait de droites, résultat absurde (**8**).

$m = 2$. — $q\left(\overset{2}{x}, \overset{4}{y}\right) = \left(\overset{2}{y}\right)f\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right)$, en désignant par f le quotient de p par μ.

En résumé, on a

$$p\left(\overset{4}{x}, \overset{2}{y}\right) = \left(\overset{2}{x}\right)f\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right),$$
$$q\left(\overset{2}{x}, \overset{4}{y}\right) = \left(\overset{2}{y}\right)f\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right).$$

Ainsi, c'est $f = 0$ qui est la véritable et unique primordiale puncto-ponctuelle de s ou s^{-1}.

On peut raisonner *mutatis mutandis* sur une autre primordiale que la puncto-ponctuelle, et il vient par conséquent :

Lemme I. — *Une primordiale quelconque d'une crémonienne contient chacune de ses deux séries de coordonnées à la dimension deux.*

Lemme II. — *Les divers réseaux d'une crémonienne (ponctuel ou linéaire) sont des réseaux de coniques.*

24. Théorème. — *Il existe une conique (critique de la crémonienne s)* A *telle que si x est sur* A, *la conique correspondante*

$$f\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right) = 0$$

du réseau R_p^{s-1} *est une droite double.*

Considérons les primordiales

$$f\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad F\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{v}\right) = 0.$$

Si l'on considère x comme fixe, $f = 0$ et $F = 0$ représentent la *même conique* respectivement en coordonnées-points y_i et coordonnées-lignes v_i (**6**).

Posons

$$f\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right) = \sum_i \sum_j y_i y_j X_{ij}\left(\overset{2}{x}\right), \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

La conique $F\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{v}\right) = 0$ doit coïncider avec celle dont l'équation est

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & v_1 \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} & v_2 \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix} = \left(\overset{4}{x}, \overset{2}{v}\right) = 0.$$

Cela exige l'identité, $A\left(\overset{2}{x}\right)$ étant une forme ternaire quadratique,

$$\left(\overset{4}{x}, \overset{2}{v}\right) = A\left(\overset{2}{x}\right) F\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{v}\right).$$

$A\left(\overset{2}{x}\right)$ divise tous les coefficients de la conique $\left(\overset{4}{x}, \overset{2}{v}\right) = 0$, c'est-à-dire

tous les mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} \end{vmatrix}$$

de la conique

$$f\left(\overset{2}{\underline{x}}, \overset{2}{y}\right) = 0.$$

Si $A(x) = 0$, tous ces mineurs sont nuls, et $f(x, y) = 0$ est une droite double. C. Q. F. D.

On verrait de même qu'il existe une critique $\mathfrak{A}$ telle que si x est sur $\mathfrak{A}$, la conique $F(\underline{x}, v) = 0$ se réduit à un point double. Le déterminant de la conique $f(\underline{x}, y) = 0$ est $A^2\mathfrak{A}$ à un coefficient constant près; le déterminant de la conique $F(\underline{x}, v) = 0$ est, à un coefficient constant près, $A\mathfrak{A}^2$.

A et $\mathfrak{A}$ sont deux *critiques* de s; ce sont deux coniques pour les points desquelles la conique du réseau $R_p^{s^{-1}}$ se réduit à un point ou à une droite double :

Droite double pour un point de A;

Point double pour un point de $\mathfrak{A}$.

Réciproquement, s^{-1} a aussi deux *critiques* B et $\mathfrak{B}$ telles que la conique du réseau R_p^s se réduit :

A une droite double pour un point de B;

A un point double pour un point de $\mathfrak{B}$.

On peut remarquer, d'ailleurs, que le déterminant de la conique $f\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right) = 0$ est $A^2\mathfrak{A}$ à une constante près; celui de la conique $f\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right) = 0$ est $B^2\mathfrak{B}$, à une constante près.

25. Appelons *réductible* toute crémonienne qui est identique à un produit de crémoniques. Nous allons démontrer que toute crémonienne est réductible.

Lemme. — *Les trois coniques* $\frac{\partial f(\underline{x}, y)}{\partial x_i} = 0$ *ont, avec* $f(\underline{x}, y) = 0$, trois *points communs situés sur la critique* B *de* s^{-1}.

Appliquons, pour déterminer les fonctions φ_i et ψ_i qui déterminent s, le procédé indiqué plus haut (**10**). Éliminons y_i entre les trois équations

$$f = \sum_i dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_i w_i y_i = 0;$$

le résultat

$$\left(\overset{4}{w}, \overset{4}{x}, \overset{2}{u}\right) = 0$$

de l'élimination représente en coordonnées-lignes w_i le produit des quatre points d'intersection des deux coniques

$$f = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_i dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Un de ces quatre points est y; soient y', y'', y''' les trois autres. L'équation du point y est

$$\sum_i w_i \varphi_i\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{u}\right) = 0;$$

donc

$$\left(\overset{4}{w}, \overset{4}{x}, \overset{2}{u}\right) = \left(\overset{3}{w}, \overset{2}{x}\right) \sum_i w_i \varphi_i\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{u}\right),$$

et le produit des trois points y', y'', y''' est représenté par l'équation

$$\left(\overset{3}{w}, \overset{2}{x}\right) = 0.$$

Les trois points y', y'', y''' ne dépendent donc pas de u_i ou, ce qui revient au même, de dx_i, et se trouvent sur chacune des coniques

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i} = 0.$$

La première partie du lemme est démontrée.

Posons

$$f = \sum_i \sum x_i x_j \, \mathrm{Y}_{ij}\left(\overset{2}{y}\right) = 0;$$

il vient

$$(0) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_j x_j Y_{ij} = 0;$$

donc le point $y^{(k)}$ (y', y'' ou y''') se trouve sur la courbe (**24**)

$$Y = B^2\left(\overset{2}{y}\right)\mathfrak{B}\left(\overset{2}{y}\right) = 0,$$

dont l'équation est obtenue par l'annulation du déterminant Y des Y_{ij}.

Si $y^{(k)}$ est sur B, le lemme est démontré. Si $y^{(k)}$ est sur $\mathfrak{B}$, des trois équations (0) on tire, puisque les mineurs de Y ne sont pas tous nuls pour un point $y^{(k)}$ non situé sur B,

$$(0') \qquad \lambda x_i = \lambda_i(y^{(k)}),$$

$$(\lambda = \text{facteur de proportionnalité}).$$

Puisque, par hypothèse, $y^{(k)}$ coïncide avec l'un des ∞ points de $\mathfrak{B}$, x coïncide avec l'un des ∞ points de la courbe $A(x) = 0$, obtenue en éliminant λ et $y_i^{(k)}$ entre les trois équations (0') et $\mathfrak{B}\left(\overset{2}{y}{}^{(k)}\right) = 0$. Mais x est l'un *quelconque* des ∞^2 points du plan : donc $y^{(k)}$ est en général sur B, et ne vient sur $\mathfrak{B}$ que pour des positions particulières de x. C. Q. F. D.

26. *Remarque.* — Il est évident que toutes les crémoniennes équivalentes (**12**) entre elles sont ou ne sont pas réductibles en même temps; que s et s^{-1} sont ou ne sont pas réductibles en même temps.

Théorème. — *Si l'un au moins des quatre réseaux* R_p^s, R_l^s, $R_p^{s^{-1}}$, $R_l^{s^{-1}}$ *est un système de coniques à trois points (ou tangentes) fixes, s est réductible.*

Il suffit de démontrer la proposition pour un système à trois points fixes, puisque l'on peut, sans altérer l'équivalence et la réductibilité, multiplier s par une dualistique et changer ainsi un système à trois tangentes fixes en un système à trois points fixes.

Supposons, par exemple, toutes les ∞^2 coniques de R_p^s se coupant en

trois points fixes; prenons ces trois points pour les trois points fondamentaux d'une substitution quadratique Cremona σ^{-1}; le réseau (**11**)

$$R_p^{s\sigma} = \sigma^{-1}[R_p^s]$$

est un réseau de droites, puisque la substitution σ^{-1} transforme en droite toute conique qui passe par ses trois points fondamentaux, et $s\sigma$ est une crémonique σ' (**8**), et

$$s = \sigma'\sigma^{-1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

27. Nous pouvons faire, sur les critiques A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, trois hypothèses différentes que nous allons successivement examiner et faire voir que s est réductible dans chacune des trois :

Une au moins des quatre critiques est une droite double;

Une au moins des quatre critiques est un couple de droites;

Les quatre critiques sont indécomposables.

Pour l'examen des deux premières hypothèses, il nous est nécessaire de connaître comment se comporte une conique de l'un des quatre réseaux de s par rapport à une branche droite d'une critique décomposable.

Soit, par exemple, R_p^s et la branche droite $y_3 = 0$ de la critique décomposable B.

Si, dans l'équation de la conique du réseau R_p^s,

$$f(x, y) = \sum_i \sum_j x_i x_j Y_{ij}\binom{2}{y} = 0,$$

on fait $y_3 = 0$, on doit avoir (**24**), pour une valeur quelconque de $y_1 : y_2$,

$$f = \sum_i \sum_j x_i x_j Y_{ij} = \left(\sum_i p_i x_i\right)^2,$$

c'est-à-dire les six identités

$$(0) \qquad Y_{ij} = p_i p_j,$$

$p_i, p_j =$ fonction de y_1 et y_2. Y_{ij} est une fonction quadratique de y_1

et y_2; si Y_{ii} est le carré d'une forme linéaire en y_1 et y_2, p_i est évidemment linéaire en y_1 et y_2, et

$$\sum_i p_i x_i = \left(\overset{1}{x}, \overset{1}{y}\right) = \xi_2 y_1 - \xi_1 y_2 \qquad (\xi_i \text{ linéaire en } x_i),$$

c'est-à-dire linéaire ternaire en x_i et linéaire binaire en y_1 et y_2. Mais, si l'on a posé

$$f = \sum_i \sum_j y_i y_j X_{ij}\left(\overset{2}{x}\right),$$

il reste, en faisant $y_3 = 0$,

$$X_{11} y_1^2 + 2X_{12} y_1 y_2 + X_{22} y_2^2 = (\xi_2 y_1 - \xi_1 y_2)^2,$$
$$f = y_3(2X_{31} y_1 + 2X_{32} y_2 + X_{33} y_3) + (\xi_2 y_1 - \xi_1 y_2)^2.$$

Donc, *la conique du réseau* R_p^{s-1} *touche la branche droite* $y_3 = 0$ *de la critique* B *en un point mobile dont les coordonnées*

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad 0$$

sont linéaires en x_i.

Supposons maintenant que l'un des Y_{ii} au moins ne soit pas le carré d'une forme linéaire en y_1, y_2, mais le produit $\lambda\mu$ de deux facteurs linéaires binaires en y_1, y_2. Alors, comme on s'en assure aisément,

$$Y_{ij} = a_i a_j \lambda\mu \qquad (a_i, a_j = \text{const.}),$$
$$f = y_3\{2X_{31} y_1 + 2X_{32} y_2 + X_{33} y_3\} + \lambda\mu\left(\sum_i a_i x_i\right)^2;$$

le réseau R_p^{s-1} est un réseau à deux points fixes

$$y_3 = \lambda = 0 \qquad \text{et} \qquad y_3 = \mu = 0.$$

En résumé, il vient :

Lemme. — *Toute branche droite de la critique* A (*ou* B) *coupe une conique quelconque du réseau* R_p^s (*ou* R_p^{s-1}) *en* deux *points fixes,*

à moins d'être tangente à la conique en un point mobile *dont les coordonnées sont linéaires en* y_i (*ou* x_i).

28. La première hypothèse (**27**) mène au lemme :

Lemme. — *Si l'une au moins des quatre critiques est une droite double, s est réductible.*

Considérons, par exemple, $B = y_3^2$ par hypothèse. Les trois points $y^{(k)}$ (**25**) sont sur la branche droite $y_3 = 0$ de B; $y^{(k)}$ ne peut être fixe, car s serait réductible (**26**); donc, l'un au moins des trois points $y^{(k)}$ est mobile avec x_i. Mais alors (lemme du **27**) les trois points $y^{(k)}$ sont confondus et ont leurs coordonnées linéaires en x_i; le produit des trois points $y^{(k)}$ est ainsi, en coordonnées-lignes w_i,

$$\left(\overset{1}{w}, \overset{1}{x}\right)^3 = 0,$$

résultat absurde, puisque ce produit doit avoir pour équation (**25**)

$$\left(\overset{3}{w}, \overset{2}{x}\right) = 0.$$

Les trois points $y^{(k)}$, distincts ou non, sont donc fixes, et s est un produit de deux crémoniques (**26**). C. Q. F. D.

29. Lemme. — *Aucun des quatre réseaux de s ou* s^{-1} *ne peut être un réseau de coniques à deux points fixes distincts ou deux tangentes fixes distinctes sans que s soit réductible.*

Une dualistique transforme un réseau à deux tangentes fixes distinctes en un réseau à deux points fixes distincts, tout en multipliant s ce qui n'altère ni l'équivalence ni la réductibilité. Il suffit donc de démontrer le lemme pour le cas de deux points fixes distincts.

Soit, par exemple, le réseau $R_p^{(-1)}$ à deux points fixes distincts, qu'on peut supposer en ω' et ω'' (**18**) en multipliant, au besoin, s par une monistique convenable, ce qui équivaut à un changement de coordonnées. Alors

$$f = 2X_{12}y_1y_2 + y_3(2X_{13}y_1 + 2X_{23}y_2 + X_{33}y_3).$$

Parmi les mineurs, tous divisibles par A (**24**), du déterminant des X_{ij}, figurent

$$X_{12}^2, \quad X_{32}^2, \quad X_{34}^2,$$

et, comme A n'est pas une droite double (**28**),

$$X_{12} = A_1 A, \qquad X_{32} = a_1 A, \qquad X_{34} = a_2 A \qquad (a_i = \text{const.}),$$
$$f = X_{33} y_3^2 + 2A(a_1 y_2 y_3 + a_2 y_3 y_1 + a_3 y_1 y_2).$$

Le réseau R_p^c est un réseau à quatre points fixes

$$X_{13} = A = 0;$$

donc s, si elle existe, est réductible (**26**). C. Q. F. D.

Le lemme nous permet d'examiner la deuxième hypothèse (**27**); et supposons, par exemple, que B se décompose en les deux droites $\Omega(y_2 = 0)$ et $\Omega''(y_3 = 0)$. Je dis que ce cas s est réductible.

Considérons une conique quelconque $f(\underline{x}, y) = 0$ du réseau R_p^c : comme il faut qu'un au moins des trois points $y^{(k)}$ (**25**) soit mobile (**26**), nous ne pouvons plus faire que les hypothèses suivantes (**27**) sur les rapports de $f = 0$ avec les deux branches Ω et Ω'' de B :

Ω et Ω'' touchent chacune f en un point mobile, et sont *deux tangentes fixes distinctes* des coniques de R_p^{c-1}, ce qui est impossible par hypothèse (lemme précédent).

Ω touche $f = 0$ en *un* point fixe ω (ne pouvant couper $f = 0$ en deux points fixes distincts), et Ω'' touche $f = 0$ en un point mobile; alors,

$$f = 2X_{23} y_2 y_3 + X_{11} y_1^2 + 2X_{12} y_1 y_2 + X_{22} y_2^2.$$

Le déterminant des X_{ij} est $X_{23}^2 X_{11}$: parmi les mineurs de ce déterminant figure X_{23}^2 ; A divise X_{23}^2 et ne peut être une droite double (**28**); donc, à des coefficients constants près,

$$X_{23} = A,$$

et, par suite,

$$X_{11} = \mathfrak{A},$$

puisque le déterminant des X_{ij} est $X_{23}^2 X_{11}$, et doit être $A^2 \mathfrak{A}$ (**24**).

Ω est une branche de la critique B; donc, pour $y_2 = 0$, $f(x, \underline{y}) = 0$ se réduit à une droite double.

Or, pour $y_2 = 0$,

$$f = \mathfrak{A} y_1^2,$$

puisque

$$X_{11} = \mathfrak{A}.$$

Ainsi, $\mathfrak{A}$ est une droite double, ce qui est contre l'hypothèse.

En résumé, il vient, en tenant compte du lemme (**28**), le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'une au moins des quatre critiques* A, $\mathfrak{A}$, B, $\mathfrak{B}$ *est décomposable, s est un produit de deux crémoniques.*

Cela est évident, puisque nos raisonnements établissent que l'un au moins des quatre réseaux est un réseau à trois points fixes ou à trois tangentes fixes, ce qui démontre l'énoncé (**26**).

30. Examinons enfin la troisième hypothèse (**27**), qui suppose les quatre critiques indécomposables.

Théorème. — *Chacune des coniques de* R_p^{s-1} (*ou* R_p^s) *a, avec* B (*ou* A), *deux éléments, dont un fixe, adhérents communs.*

Soient $\lambda y_i = \lambda_i \binom{2}{t}$ (λ = facteur de proportionnalité) les expressions des coordonnées d'un point quelconque y de $B\binom{2}{y} = 0$, λ_i désignant une forme quadratique binaire en t_1 et t_2. Alors, si dans la primordiale

$$f = \sum_i \sum_j x_i x_j Y_{ij} \binom{2}{y}$$

on remplace y_i par $\lambda_i \binom{2}{t}$, on doit avoir

$$(0) \qquad f = \sum_i \sum_j x_i x_j Y_{ij} \binom{4}{t} = \left(\sum_i p_i x_i\right)^2,$$

en vertu d'une proposition connue (**24**), p_i désignant une certaine fonction à déterminer du paramètre $t_1 : t_2$.

De l'identité (o) on tire les égalités

$$(o') \qquad p_i p_j = Y_{ij}\left(\overset{1}{t}\right).$$

Supposons d'abord que $Y_{ii}\left(\overset{1}{t}\right)$ $(i = 1, 2, 3)$ soit le carré d'une forme quadratique binaire en t_1, t_2; en vertu de (o'), cette forme est p_i; p_i est donc une forme quadratique binaire en t_1, t_2; il vient

$$f\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{t}\right) = \left(\sum_i p_i x_i\right)^2$$

$$\frac{\partial f\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{t}\right)}{\partial x_i} = 2 p_i \sum_i p_i x_i.$$

Les paramètres $t_1 : t_2$ des quatre points où B est coupée respectivement par $f(\underline{x}, y) = o$ et $\frac{\partial f(\underline{x}, y)}{\partial x_i} = o$ sont les racines de l'équation biquadratique en $t_1 : t_2$,

$$(o'') \qquad \left(\sum p_i x_i\right)^2 = o \qquad \text{ou} \qquad p_i \sum_i p_i x_i = o$$

respectivement.

Les trois points $y^{(k)}$ se trouvent à la fois (**25**) sur $B = o$, $f(x, y) = o$ et $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i} = o$; les quatre équations (o'') ont, par suite, trois racines communes, lesquelles ne peuvent évidemment être que les *deux* racines de

$$\sum_i x_i p_i = o,$$

et *une* racine commune aux trois équations

$$p_i = o.$$

On a donc

$$p_i = p\left(\overset{1}{t}\right) q_i\left(\overset{1}{t}\right),$$

$$(o''') \qquad f\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{t}\right) = \left[\sum q_i\left(\overset{1}{t}\right) x_i\right]^2 \left[p\left(\overset{1}{t}\right)\right]^2 = o,$$

$$(o''' \textit{ bis}) \qquad \frac{\partial f\left(\overset{2}{x}, \overset{1}{t}\right)}{\partial x_i} = q_i\left(\overset{1}{t}\right)\left[p\left(\overset{1}{t}\right)\right]^2 \sum q_i\left(\overset{1}{t}\right) x_i = o.$$

Les équations (o''') et (o''' *bis*) indiquent simplement que les points y' et y'' sont confondus au point fixe, dont le paramètre $t_1 : t_2$ est donné par

$$p\binom{1}{t} = 0;$$

le point y''' est mobile avec x sur la courbe B, puisque son paramètre $t_1 : t_2$ est donné par l'équation

$$\sum x_i q_i\binom{1}{t} = 0.$$

D'ailleurs (o''') montre aussi que B est touchée par $f(\underline{x}, y) = 0$ au point y'''. Les deux éléments formés par y' et y''' et les tangentes en B à ces points adhèrent donc à la fois à B et à $f(x, y) = 0$.

C. F. Q. D.

Supposons maintenant qu'une au moins des formes biquadratiques $Y_{ii}\binom{2}{t}$ en t_1, t_2, Y_{33} par exemple, ne soit pas carré parfait.

Une discussion d'Algèbre élémentaire montre que, en vertu des égalités (o'), tout facteur linéaire binaire en t_1, t_2, affecté dans Y_{33} d'un exposant impair, divise toutes les formes $Y_{ij}\binom{4}{t}$; soit α ce facteur, la conique $f(\underline{x}, y) = 0$ coupe évidemment B en un point *fixe*, dont la position sur B est donnée par la racine $t_1 : t_2$ de l'équation $\alpha = 0$.

Cela posé, si $Y_{33}\binom{4}{t}$ n'est pas carré parfait, Y_{33} sera de l'une des formes suivantes (α, β, γ, δ = facteurs linéaires en $t_1 : t_2$),

$$\alpha\beta\gamma\delta, \quad \alpha\beta\gamma^2, \quad \alpha\beta^3.$$

Dans tous les cas, Y_{33} a au moins deux facteurs affectés d'exposants impairs, le réseau R_p^{s-1} serait donc à deux points fixes distincts (**29**), ce qui est absurde, puisque l'une au moins des quatre critiques serait une droite double. Il est absurde de supposer, d'ailleurs, que le réseau R_p^s est à quatre points fixes, car alors, pour y donné quelconque dans le plan, le point $s^{-1}[y] = 0$, intersection (**10**) des coniques

$$f(\underline{x}, y) = 0, \qquad \sum_i dy_i \frac{\partial f(x, y)}{\partial y_i} = 0,$$

$$\sum_i c_i dy_i = 0.$$

serait fixe.

$Y_{ii}\left(\overset{2}{i}\right)$ est donc forcément carré parfait, et le théorème est démontré.

On démontrerait, par le même raisonnement, que $f(x, \underline{y}) = 0$ se comporte, par rapport à A, comme $f(\underline{x}, y) = 0$ par rapport à B.

31. Nous pouvons toujours supposer

$$A = x_1^2 - x_2 x_3, \qquad B = y_1^2 - y_2 y_3,$$

(ω, Ω) (**18**) l'élément fixe adhérant à la fois à

$$A = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x, \underline{y}) = 0$$

ou à

$$B = 0 \qquad \text{et} \qquad f(\underline{x}, y) = 0$$

respectivement. Si, en effet, A et B et l'élément en question occupaient une autre position dans le plan, il suffirait, pour amener les deux critiques et l'élément à la position voulue, d'effectuer sur x_i et y_i des collinéations convenables; or cela revient à multiplier devant et derrière s par des monistiques convenables, et n'altère ni l'équivalence, ni la réductibilité.

Cela posé, puisque $f(\underline{x}, y) = 0$ touche en $\omega(y_1 = y_2 = 0)$ la droite $\Omega(y_2 = 0)$, il vient

$$f = 2X_{23}y_2y_3 + X_{11}y_1^2 + 2X_{12}y_1y_2 + X_{22}y_2^2,$$

ou, ce qui n'est ni plus ni moins général,

$$f = 2X_{23}B + X'_{11}y_1^2 + 2X_{12}y_1y_2 + X_{22}y_2^2.$$

On voit aisément que A devant diviser tous les mineurs du déterminant des X_{ij} et étant indécomposable ne peut être que $2X_{23}$, et il vient

$$f = AB + X_{11}y_1^2 + 2X_{12}y_1y_2 + X_{22}y_2^2.$$

Posons

$$P\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right) = X_{11}y_1^2 + \ldots = Y_{11}x_1^2 + 2Y_{12}x_1x_2 + \ldots,$$

$P(\underline{x}, y) = 0$ représente deux fois la droite menée de ω au point de contact de $f(\underline{x}, y) = 0$ avec B; $P(x, \underline{y}) = 0$ représente aussi deux fois la courbe de contact A avec $f(x, \underline{y}) = 0$ (**50**); cette corde de contact passe par ω, quel que soit y, et x_3 manque dans P.

Ainsi, $P(x_1, x_2; y_1, y_2)$ doit être à la fois le carré d'une forme linéaire en x_1, x_2 et le carré d'une forme linéaire en y_1, y_2; donc

$$P = (\overset{1}{x}, \overset{1}{y})^2 = \{y_2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)y_2\}^2.$$

Cela étant, je considère le réseau

$$R_p^{\rho} = \rho[R_p^{\varepsilon}],$$

ρ étant la canonique connue (**21**).

La conique générale de ce réseau sera, après départ du facteur x_2^2,

$$\rho[f] = x_2x_3B + \{y_2(a_{11}x_1 + \ldots) - y_1(a_{21}x_1 + \ldots)\}^2.$$

On vérifie aisément que la critique A de $s\rho$ est $x_2x_3 = 0$, couples de droites; $s\rho = \sigma\sigma'$ (théorème du n° **29**), σ, σ' = crémoniques, et

$$s = \sigma\sigma'\rho;$$

donc :

Théorème I. — *Si les quatre critiques sont indécomposables, s est un produit de* trois *crémoniques.*

Réunissant ce théorème à celui du **29**, il vient :

Théorème II. — *Toute crémonienne est un produit de deux ou de trois crémoniques.*

Nous sommes ainsi amenés à distinguer des crémoniennes à *deux* et à *trois composantes crémoniques.*

Nota. — La primordiale puncto-ponctuelle n'est autre que l'*æquatio directrix* de Plücker (Clebsch-Lindemann, *Leçons sur la Géométrie*, traduction Benoist, t. III, p. 466).

QUATRIÈME PARTIE.

CRÉMONIENNES A DEUX COMPOSANTES CRÉMONIQUES; ÉLÉMENTS, CONNEXES, FACTEURS FONDAMENTAUX.

32. Parmi diverses crémoniennes équivalentes, nous ne construirons, comme plus haut (**16**), qu'une seule à expression particulièrement simple, qui sera la *canonique*.

Toute crémonique est de la forme (**22**) $\alpha\sigma\beta$, où $\sigma = \zeta$, ϖ ou ρ; α et β sont des linéaires monistiques ou dualistiques; le produit de deux crémoniques sera équivalent à une des neuf substitutions

$$(\mathrm{o})\qquad \left|\begin{matrix} \zeta m \zeta & \zeta m \varpi & \zeta m \rho \\ \varpi m \zeta & \varpi m \varpi & \varpi m \rho \\ \rho m \zeta & \rho m \varpi & \rho m \rho \end{matrix}\right|.$$

m = linéaire quelconque.

Lemme I. — *Aucune des substitutions du tableau* (o) *ne peut être une crémonienne quadratique, si m est monistique.*

Cela est évident, car le produit de deux substitutions Cremona est une substitution Cremona et non une crémonienne.

Lemme II. — *Aucune des substitutions du tableau* (o) *ne peut être crémonienne quadratique, si elle contient la composante ζ.*

Il suffit de démontrer le lemme pour $\zeta m \zeta$, $\varpi m \zeta$, $\rho m \zeta$, car $(\zeta m \zeta)^{-1}$, $(\varpi n \zeta)^{-1}$, $(\rho n \zeta)^{-1}$ sont respectivement de la forme $\zeta m \zeta$, $\zeta m \varpi$, $\zeta m \rho$ et que l'inverse d'une crémonienne doit être une crémonienne (**23**).

Appelons, pour abréger, σ l'une quelconque des crémoniques ζm, ϖm, ρm. Puisque m est dualistique, on a

$$\sigma = \left|\begin{matrix} x_i & \varphi_i(\overset{2}{u}) \\ u_i & \psi_i(\overset{1}{x}, \overset{2}{u}) \end{matrix}\right|.$$

Posons

$$\varphi = \sum_i k_i \varphi_i(\overset{2}{u}) = 0,$$

$$k_i = \text{const. arbitraire.}$$

Pour que la crémonienne $\sigma\zeta$ soit quadratique, il faut qu'il se sépare de

$$\zeta[\varphi] = \sum_i k_i \varphi_i(x^2 u) = (\overset{1}{x}, \overset{2}{u})$$

un facteur $\Pi(\overset{2}{x})$ d'ordre deux en x_i. Π ne peut être que le carré d'un facteur fondamental de ζ ou le produit de deux facteurs fondamentaux (**19**).

Il suffira d'examiner les cas $x_3^2 = \Pi$ et $\Pi = x_1 x_2$, par exemple.

Si $\Pi = x_3^2$, le connexe $\varphi(u) = 0$ doit contenir les ∞ éléments adhérents au point $\omega(x_1 = x_2 = 0)$; l'équation de ces ∞ éléments en coordonnées-lignes u_i est $u_3 = 0$; ainsi $\varphi(u)$ est divisible par u_3, pour k_i quelconque; $\varphi_i(u)$ est aussi divisible par u_3 et σ est linéaire dualistique: alors $\sigma\zeta$ est crémonique, ce qui est contre l'hypothèse.

On discuterait de même le cas $\Pi = x_1 x_2$.

Lemme III. — *Pour qu'une substitution du tableau* (0), *dépourvue de la composante* ζ, *soit crémonienne quadratique, il faut que la dualistique* m *ne déplace pas l'élément focal* (ω, Ω) *et soit par conséquent de la forme*

$$m = \begin{vmatrix} x_1 & m_1 u_1 + m_{13} u_3 \\ x_2 & m_2 u_3 \\ x_3 & m_{31} u_1 + m_3 u_2 + m_{33} u_3 \\ u_1 & m_1^{-1} x_1 + m_2 m_{31} x_2 \\ u_2 & m_3 m_{13} x_1 + (m_1 m_{33} - m_{13} m_{31}) x_2 + m_2^{-1} x_3 \\ u_3 & m_3^{-1} x_2 \end{vmatrix},$$

le déterminant $-m_1 m_2 m_3$ de m étant l'unité, d'où

$$m_1 m_2 m_3 = -1.$$

Conservons les notations précédentes; appelons encore σ l'une quelconque des deux crémoniques ϖm ou ρm.

$$\sigma = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\left(\overset{2}{u}\right) \\ u_i & \psi_i\left(\overset{1}{x}, \overset{2}{u}\right) \end{vmatrix}.$$

Lemme auxiliaire. — *Soit $\varphi\left(\overset{2}{u}\right) = 0$ l'équation d'une conique en coordonnées-lignes u_i; pour qu'il se sépare respectivement de $\varpi[\varphi(u)]$ le facteur x_1^2 et de $\rho[\varphi(u)]$ le facteur x_2^2, il faut et il suffit que la conique adhère à l'élément focal.*

Le connexe $\varphi(u) = 0$ d'abord doit contenir l'élément focal (**20** et **21**); donc

$$\varphi = u_2(a_1 u_1 + a_3 u_3) + Q(u_1, u_3),$$

$$Q = \text{forme quadratique binaire.}$$

Alors

$$\varpi[\varphi] = -x_1 x_2^2 u_2\,(a_1 x_1 + a_3 x_1 u_3) + x_1^2 Q(x_1, x_1 u_3),$$

$$\rho[\varphi] = \quad x_2 \rho[u_2](a_1 x_2 + a_3 x_2 u_3) + x_2^2 Q(x_2, x_2 u_3).$$

Comme $\rho[u_2] = x_1^2 u_3 - x_2^2 u_2$ n'est pas divisible par x_2, il faut avoir $a_1 = 0$ et cela suffit; alors

$$\varphi = a_3 x_2 x_3 + Q(u_1, u_2) = 0$$

et adhère à l'élément focal.

Cela posé, pour que $\sigma\varpi$ ou $\sigma\rho$ soit crémonienne, il faut qu'il se sépare de $\varpi[\varphi(u)]$ et de $\rho[\varphi(u)]$ un facteur quadratique Π en x_i; on a posé d'ailleurs

$$\varphi(u) = \sum_i k_i \varphi_i(u),$$

$$k_i = \text{const. arbitraire.}$$

Le facteur Π ne peut être que x_2^2 si l'on considère $\sigma\rho$ et que x_1^2 ou $x_1 x_2$ si l'on considère $\sigma\varpi$.

Si H est x_1^2 ou x_2^2, le lemme auxiliaire prouve que la conique $\varphi(u) = 0$ adhère à l'élément focal. D'ailleurs la conique $\varphi(u)$ est, pour $\sigma = \varpi m$,

$$m[R_1 x_1 x_2 + R_2 x_1^2 + R_3 x_2 x_3],$$

pour $\sigma = \varphi m$

$$m[R_1 x_1 x_2 + R_2 x_2^2 + R_3(x_1^2 - x_2 x_3)],$$

et n'adhère qu'à un seul élément fixe (indépendant des k_i), à l'élément $m^{-1}[(\omega, \Omega)]$. Donc

$$(\omega, \Omega) = m[(\omega, \Omega)].$$

Si H est $x_1 x_2$, le connexe $\varphi(u) = 0$ doit contenir les ∞ éléments adhérents à ω'; $\varphi(u)$ et $\varphi_i(u)$ seraient divisibles par u_2, σ serait une linéaire dualistique et $\sigma\varpi$ une crémonique.

Soit maintenant

$$m = \begin{vmatrix} x_i & \sum_j m_{ij} u_j \\ u_i & \sum_j \mu_{ij} x_j \end{vmatrix},$$

μ_{ij} étant l'élément du système adjoint du système des m_{ij}, le déterminant de ces dernières étant l'unité [*voir* mon Mémoire *Sur les substitutions linéaires de contact* (*Journal de Mathématiques*, 1887)]. Puisque m ne déplace pas l'élément focal, la droite $m[\omega]$ coïncide avec Ω et le point $m[\Omega]$ avec ω; cela exige $m_{12} = m_{21} = m_{22} = 0$: m prend la forme indiquée dans l'énoncé. C. Q. F. D.

55. La dualistique m a pour primordiale puncto-ponctuelle

$$\begin{aligned} M(\overset{1}{x}, \overset{1}{y}) = {} & m_1^{-1} x_1 y_1 + m_2^{-1} x_3 y_2 \\ & + m_3^{-1} x_2 y_3 + \mu x_2 y_2 + m_2 m_{34} x_2 y_1 + m_3 m_{13} x_1 y_2 = 0; \\ & \mu = m_1 m_{33} - m_{13} m_{31}, \qquad m_1 m_2 m_3 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Pour avoir la primordiale puncto-ponctuelle de $\alpha^{-1} m \beta$, α et β étant des linéaires quelconques, il suffit évidemment (**11**) d'effectuer dans $M = 0$ la linéaire β sur les x_i et la linéaire α sur les y_i.

On vérifie aisément que la monistique

$$a = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \\ x_3 & a' x_1 + a x_3 \\ \cdot\cdot & \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

est échangeable à ϖ ($a\varpi = \varpi a$) pour a' et a quelconques, et que la monistique

$$\alpha = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha x_1 + 2\alpha' x_2 \\ x_2 & x_2 \\ x_3 & 2\alpha\alpha' x_1 + 2\alpha'^2 x_2 + \alpha^2 x_3 \\ \cdot\cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

est échangeable à ρ ($\alpha\rho = \rho\alpha$) pour des valeurs quelconques de α et α'.

Soient a, b, ... des monistiques de la forme a: soient α, β, ... des monistiques de la forme α; la substitution

$$\begin{array}{lcl} \alpha\rho m\rho\beta = \rho\alpha m\beta\rho & \text{est équivalente à} & \rho m\rho, \\ \alpha\rho m\varpi a = \rho\alpha m a\varpi & \quad\text{»} & \rho m\varpi, \\ a\varpi m\rho\alpha = \varpi a m\alpha\rho & \quad\text{»} & \varpi m\rho, \\ a\varpi m\varpi b = \varpi a m b\varpi & \quad\text{»} & \varpi m\varpi, \end{array}$$

et nous pourrons, pour la recherche de la forme canonique, effectuer dans $M(x, y)$ des monistiques convenables de façon à simplifier l'expression de m.

54. Théorème. — *Une crémonienne de la forme $\varpi m\varpi$ a pour forme canonique $\varpi E\varpi$, où E désigne la dualistique suivante :*

$$E = \begin{vmatrix} x_1 & -u_1 \\ x_2 & u_3 \\ x_3 & u_2 - e u_3 \\ u_1 & -x_1 \\ u_2 & e x_2 + x_3 \\ u_3 & x_2 \end{vmatrix}.$$

La primordiale puncto-ponctuelle de E est

$$\mathfrak{E} = -x_1 y_1 + e x_2 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_2.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de faire voir qu'on peut reproduire $M(x, y)$ (**55**), en effectuant dans $\mathfrak{E}$ sur x_i et y_i des monistiques convenables de la forme a (**55**).

Effectuons sur x_i la monistique a; sur y_i la monistique b; $\mathfrak{E}$ devient

$$\begin{aligned} &-x_1 y_1 + e x_2 y_2 + x_2(b' y_1 + b y_3) + y_2(a' x_1 + a x_3) \\ &= -x_1 y_1 + e x_2 y_2 + b' x_2 y_1 + a' x_1 y_2 + b x_2 y_3 + a x_3 y_2. \end{aligned}$$

Pour identifier avec M, il suffit de poser

$$e = -m_1 \mu, \qquad b' = -m_1 m_2 m_{31}, \qquad a' = -m_1 m_3 m_{13},$$
$$b = -m_1 m_3^{-1}, \qquad a = -m_1 m_2^{-1}.$$

Il vient ensuite

$$\varpi E = \begin{vmatrix} x_1 & -u_1 u_3 \\ x_2 & u_1^2 \\ x_3 & u_3(u_2 - e u_3) \\ u_1 & u_1(2 e x_2 u_3 - r_1) \\ u_2 & u_3^2(e x_2 + x_3) \\ u_3 & -u_1^2 x_2 \end{vmatrix}.$$

Effectuons maintenant dans ϖE la substitution ϖ; il vient, eu égard à la forme de ϖ (**20**) et après suppression du facteur x_1^2 dans les φ_i et du facteur x_1^4 dans les ψ_i, la *forme canonique* pour les crémoniennes, telles que $\varpi m \varpi$

$$\varpi E \varpi = \begin{vmatrix} x_1 & -x_1 u_3 r_1 \\ x_2 & r_1^2 \\ x_3 & -u_3(x_2^2 u_2 + e x_1^2 u_3) \\ u_1 & r_1(2 e x_1 u_3 - x_2 u_1) \\ u_2 & u_3^2(e x_1^2 + x_2 x_3) \\ u_3 & -r_1^2 \end{vmatrix} = (\varpi E \varpi)^{-1}.$$

35. Théorème. — *Si* E *désigne la même dualistique que dans le théorème précédent, la forme canonique des crémoniennes* $\rho m \varpi$ *est* $\rho E \varpi$.

Il suffit de démontrer encore qu'en effectuant dans $\mathfrak{E}$ une monistique β sur les y_i et a sur les x_i on reproduit M.

Effectuons ces monistiques; $\mathfrak{E}$ devient

$$\begin{aligned}
&-(\beta y_1 + 2\beta' y_2)x_1 + e x_2 y_2 + x_2(2\beta\beta' y_1 + 2\beta'^2 y_2 + \beta^2 y_3)\\
&\quad + y_2(a' x_1 + a x_3)\\
&= -\beta x_1 y_1 + x_2 y_2 (e + 2\beta'^2)\\
&\quad + 2\beta\beta' x_2 y_1 + a' x_1 y_2 + \beta^2 x_2 y_3 + a x_3 y_2.
\end{aligned}$$

Pour identifier avec M, posons, k étant un facteur de proportionnalité

$$\begin{aligned}
-\beta &= k m_1^{-1}, & a' &= k m_3 m_{13},\\
e + 2\beta'^2 &= k\mu, & \beta^2 &= k m_3^{-1},\\
2\beta\beta' &= k m_2 m_{31}, & a &= k m_2^{-1}.
\end{aligned}$$

Ces six équations déterminent les six constantes a, a', β, β', e, k; ces dernières sont assujetties simplement à $ka\beta \neq 0$, qui a toujours lieu en vertu de $m_1 m_2 m_3 + 1 = 0$.

Cela posé, effectuons le produit ρE; il vient

$$\rho E = \begin{vmatrix}
x_1 & -u_1 u_3\\
x_2 & u_3^2\\
x_3 & u_1^2 - u_3(u_2 - e u_3)\\
u_1 & u_3(2x_2 u_1 + x_1 u_3)\\
u_2 & u_1^2 x_2 - u_3^2(e x_2 + x_3)\\
u_3 & u_3^2 x_2
\end{vmatrix}.$$

Effectuons maintenant $\rho E \varpi$; il vient, après départ du facteur x_1^2 dans

les ϱ_i et du facteur x_1^3 dans les ψ_i.

$$\varrho E \varpi = \begin{vmatrix} x_1 & -x_1 u_3 r_1 \\ x_2 & x_1^2 u_3^2 \\ x_3 & r_1^2 + u_3(x_2^2 u_2 + e x_1^2 u_3) \\ u_1 & x_1 u_3 (x_2 u_3 + 2 r_1) \\ u_2 & r_1^2 - u_3^2 (e x_1^2 + x_2 x_3) \\ u_3 & x_1^2 u_3^2 \end{vmatrix}.$$

Nous avons construit ainsi la *forme canonique* des crémoniennes $\varrho m \varpi$.

36. Théorème. — *La forme canonique des crémoniennes $\varpi m \varrho$ est $\varpi E \varrho$.*

Toute crémonienne de la forme $\varpi m \varrho = (\varrho m^{-1} \varpi)^{-1}$ a pour inverse une crémonienne de la forme $\varrho m \varpi$. Nous pouvons prendre pour forme canonique des crémoniques $\varpi m \varrho$ l'inverse de la forme canonique $\varrho E \varpi$ des crémoniennes $\varrho m \varpi$. Or $E^{-1} = E$, comme on le voit par la symétrie de $\mathfrak{E}$; la forme canonique cherchée pour les crémoniennes $\varpi m \varrho$ est ainsi $\varpi E \varrho$.

La crémonique ϖE est déjà construite (**34**); il vient pour la *forme canonique*, après départ du facteur x_2^2 dans les ϱ_i et x_2^3 dans les ψ_i.

$$\varpi E \varrho = \begin{vmatrix} x_1 & -x_2 u_3 r_2 \\ x_2 & r_2^2 \\ x_3 & u_3(x_1^2 u_3 - x_2^2 u_2 - e x_2^2 u_3) \\ u_1 & r_2(r_1 + 2 e x_2 u_3) \\ u_2 & u_3^2(e x_2^2 + x_1^2 - x_2 x_3) \\ u_3 & -r_2^2 \end{vmatrix} = (\varrho E \varpi)^{-1}.$$

37. Théorème. — *Toute crémonienne de la forme $\varrho m \varrho$ a pour*

forme canonique $\rho H \rho$, *où* H *désigne la dualistique*

$$H = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & hu_3 \\ x_3 & hu_2 \\ u_1 & hx_1 \\ u_2 & x_3 \\ u_3 & x_2 \end{vmatrix} = H^{-1}.$$

Nous pouvons remarquer que toute monistique, telle que

$$a = \begin{vmatrix} x_1 & ax_1 + a'x_2 \\ x_2 & x_2 \\ x_3 & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a^2x_3 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix},$$

est telle que $\rho a \rho$ soit une linéaire a_0 de la même forme. Alors, si b désigne une seconde monistique de la forme a,

$$\rho bnaa\rho = a_0 \rho m \rho b_0.$$

La primordiale puncto-ponctuelle de H est

$$\mathcal{G} = hx_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 = 0.$$

Il suffit de démontrer qu'en faisant dans $\mathcal{G}$ la monistique b sur y_i et a sur y_i, on reproduit M, pour des coefficients de a et b convenablement choisis.

Faisant le calcul, $\mathcal{G}$ devient

$$\begin{aligned} &h(ax_1 + a'x_2)(by_1 + b'y_2) \\ &\quad + x_2(b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b^2y_3) + y_2(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a^2x_3) = 0 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} &habx_1y_1 + x_2y_2(ha'b' + b_{32} + a_{32}) + b^2x_2y_3 + a^2x_3y_2 \\ &\quad + x_2y_1(ha'b + b_{31}) + x_1y_2(hab' + a_{31}) = 0. \end{aligned}$$

Pour identifier avec M, il suffit, k désignant un facteur de proportionnalité, de poser

$$(o)\quad \left\{\begin{array}{c} hab = km_1^{-1}, \qquad b^2 = km_3^{-1}, \qquad a^2 = km_2^{-1}, \\ ha'b + b_{31} = km_2 m_{31}, \qquad hab' + a_{31} = km_3 m_{13}, \\ ha'b' + b_{32} + a_{32} = k\mu. \end{array}\right.$$

Il est évidemment possible toujours de satisfaire au système des six équations (o) à l'aide des neuf quantités $a, b, a', b', a_{31}, a_{32}, b_{31}, b_{32}, k$, dont plusieurs restent arbitraires; mais h est bien déterminé et unique, car

$$m_2 m_3 = h^2 m_1^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela posé, on trouve successivement

$$\rho\Pi = \begin{vmatrix} x_1 & hu_1u_3 \\ x_2 & h^2u_3^2 \\ x_3 & u_1^2 - h^2u_2u_3 \\ u_1 & -hu_3(h^2x_1u_3 + 2x_2u_1) \\ u_2 & x_2u_1^2 - h^2x_3u_3^2 \\ u_3 & h^2x_2u_3^2 \end{vmatrix}.$$

$$\rho\Pi\rho = (\rho\Pi\rho)^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & hx_2u_3v_2 \\ x_2 & h^2x_2^2u_3^2 \\ x_3 & v_2^2 - h^2u_3(x_1^2u_3 - x_2^2u_2) \\ u_1 & -hx_2u_3(2v_2 + h^2x_1u_3) \\ u_2 & v_2^2 - h^2u_3^2(x_1^2 - x_2x_3) \\ u_3 & h^2x_2^2u_3^2 \end{vmatrix}.$$

Après avoir ainsi explicitement construit les diverses formes canoniques des crémoniennes à deux composantes crémoniques, nous allons rechercher les éléments, les connexes et les facteurs fondamentaux.

38. *Construction des éléments fondamentaux de* $\varpi E \varpi$.

Reportons-nous à l'expression (**34**) de

$$\varpi E \varpi = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i \\ u_i & \psi_i \end{vmatrix}.$$

Les éléments fondamentaux doivent évidemment être cherchés sur le connexe

$$r_1 = x_2 u_2 - x_3 u_3 = 0,$$

lequel contient les ∞ éléments adhérents à

$$\omega, \quad \omega', \quad \omega'', \quad \Omega, \quad \Omega' \quad \text{ou} \quad \Omega'',$$

côtés et sommets (**18**) du triangle des coordonnées.

On vérifie que $\varphi_i = \psi_i = 0$ pour les ∞ éléments adhérents à ω, Ω, Ω, ω'. Cherchons les autres éléments fondamentaux, c'est-à-dire ceux qui n'adhèrent ni à un côté, ni à un sommet du triangle des coordonnées.

Des deux équations $r_1 = \sum_i u_i x_i = 0$ résulte

$$(0) \qquad u_1 = 2x_2 x_3, \qquad u_2 = -x_1 x_3, \qquad u_3 = -x_1 x_2,$$

omettant le facteur de proportionnalité.

Alors effectuant le remplacement dans φ_i et ψ_i, il vient

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = -x_1^2 x_2^2 (e x_1^2 + x_2 x_3),$$
$$\psi_1 = \psi_3 = 0, \qquad \psi_2 = -x_1 x_2 (e x_1^2 + x_2 x_3).$$

Pour que l'élément soit fondamental, x doit être sur la conique $e x_1^2 + x_2 x_3 = 0$; alors les équations (0) donnent après suppression de $-x_1$

$$u_1 = 2e x_1, \qquad u_2 = x_3, \qquad u_3 = x_2$$

et (x, u) adhère à $e x_1^2 + x_2 x_3 = 0$. Ainsi :

Théorème I. — *Les éléments fondamentaux de* $\varpi E \varpi$ *sont tous les éléments adhérents à* ω, ω', Ω, Ω' *ou à la conique*

$$e x_1^2 + x_2 x_3 = 0.$$

Pour trouver les facteurs fondamentaux, nous employons une méthode expéditive. Les facteurs fondamentaux de $\varpi E \varpi$ sont ceux qui se détachent de $\varpi E \varpi | P(x, u)|$, $P = 0$ étant un connexe irréductible (lemme du n° **19**). Or, au lieu d'effectuer $\varpi E \varpi$ dans P, je puis effectuer successivement ϖ, E et ϖ; il vient alors

$$\varpi | P | = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} P',$$
$$E \varpi | P | = u_1^{\alpha_1} u_3^{\alpha_2} E | P' |,$$
$$\varpi E \varpi | P | = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2} x_1^{\alpha_1} r_1^{\alpha_1} r_1^{\alpha_2} u_3^{\alpha_2} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} P''.$$

Les facteurs fondamentaux doivent donc être cherchés parmi les facteurs

$$x_1, \quad x_2, \quad u_3, \quad r_1.$$

On vérifie sans peine que la substitution $\varpi E \varpi$ transforme les ∞^2 éléments du connexe $x_1 = 0$ en les ∞^2 éléments du même connexe; au contraire, $\varpi E \varpi$ transforme respectivement les ∞^2 éléments du connexe

$r_1 = 0$, en l'élément focal (ω, Ω),

$u_3 = 0$, en les ∞ éléments adhérents à ω',

$x_2 = 0$, » » à la conique $e x_1^2 + r_2 x_3 = 0$;

d'où, tenant compte du lemme de **19**,

Théorème II. — *Les facteurs fondamentaux de* $\varpi E \varpi$ *sont* x_2, u_3, $r_1 = x_2 u_2 - x_3 u_3$. *Soit* P *une forme mixte irréductible; pour qu'il se sépare de* $\varpi E \varpi | P |$ *les facteurs* r_1, x_2, u_3, *il faut et il suffit respectivement que le connexe* $P = 0$ *contienne l'élément focal, les* ∞ *éléments adhérents à la conique* $e x_1^2 + x_2 x_3 = 0$, *les* ∞ *éléments adhérents au point* ω'.

39. *Construction des éléments et des facteurs fondamentaux de* $\rho E \varpi$.

Nous reportant à la forme de $\rho E \varpi$ (**35**) et suivant la méthode employée pour $\varpi E \varpi$, nous établissons aisément les propositions :

THÉORÈME I. — *Les éléments fondamentaux de* $\rho E \varpi$ *sont tous les* ∞ *éléments adhérents à* Ω, Ω', ω, ω' *et au point* $\mathfrak{h}$ *dont les coordonnées sont* $\mathfrak{h}_1 = 0$, $\mathfrak{h}_2 = 4$, $\mathfrak{h}_3 = 1$.

THÉORÈME II. — *Les facteurs fondamentaux de* $\rho E \varpi$ *sont* $x_1 u_3$ *et* x_2. *Soit* $P = 0$ *un connexe irréductible; pour qu'il se sépare de* $\rho E \varpi [P]$ *les facteurs* $x_1 u_3$ *et* x_2, *il faut et il suffit respectivement que* $P = 0$ *contienne l'élément focal et les* ∞ *éléments adhérents à la conique* $x_1^2 - x_2 x_3 + e x_2^2 = 0$.

40. *Construction des éléments et des facteurs fondamentaux de* $\varpi E \rho$.

THÉORÈME I. — *Les éléments fondamentaux de* $\varpi E \rho$ *sont tous les* ∞ *éléments adhérents à* ω, Ω *et à la conique* $x_1^2 - x_2 x_3 + e x_2^2 = 0$.

THÉORÈME II. — *Les facteurs fondamentaux de* $\varpi E \rho$ *sont* r_2, u_3, x_2. *Soit* $P = 0$ *un connexe irréductible; pour qu'il se sépare de* $\varpi E \rho [P]$ *le facteur* r_2, u_3, x_2 *il faut et il suffit respectivement que le connexe* $P = 0$ *contienne l'élément focal, les* ∞ *éléments adhérents à* ω', *les* ∞ *éléments adhérents au point* $\mathfrak{h}$ *déjà construit.*

40. *Construction des éléments et des facteurs fondamentaux de* $\rho H \rho$.

THÉORÈME I. — *Les éléments fondamentaux de* $\rho H \rho$ *sont les* ∞ *éléments adhérents à* ω, *ou à* Ω.

THÉORÈME II. — *Le facteur fondamental de* $\rho H \rho$ *est* $x_2 u_3$; *soit* $P = 0$ *un connexe irréductible; pour qu'il se sépare de* $\rho H \rho [P]$ *le facteur* $x_2 u_3$, *le connexe* $P = 0$ *doit (et cela suffit) contenir l'élément focal.*

41. Comme toute crémonienne s à deux composantes crémoniques est équivalente (**32**) à l'une des quatre crémoniennes qui viennent d'être construites

$$(o) \qquad \varpi E \varpi, \quad \rho E \varpi, \quad \varpi E \rho, \quad \rho H \rho,$$

il suffira de transformer par une linéaire convenable les éléments et les connexes fondamentaux d'une crémonienne du tableau (o) pour avoir les éléments et les connexes fondamentaux de s.

CINQUIÈME PARTIE.

CRÉMONIENNES A TROIS COMPOSANTES CRÉMONIQUES; ÉLÉMENTS, CONNEXES ET FACTEURS FONDAMENTAUX.

42. Soit s une crémonienne à *trois* composantes crémoniques; je vais encore profiter de l'équivalence pour amener s à une *forme canonique*, en multipliant s devant et derrière par des linéaires convenablement choisies.

Nous avons vu (**51**) que la primordiale puncto-ponctuelle de s est, en égard à l'équivalence,

$$f = o = AB - K^2[y_2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) - y_1(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)]^2,$$
$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1, \qquad A = x_1^2 - x_2x_3,$$
$$K = \text{const.}, \qquad B = y_1^2 - y_2y_3.$$

Appelons σ la linéaire binaire de déterminant 1

$$\sigma = \begin{vmatrix} t_1 & \sigma[t_1] \\ t_2 & \sigma[t_2] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_1 & a_{11}t_1 + a_{12}t_2 \\ t_2 & a_{21}t_1 + a_{22}t_2 \end{vmatrix};$$

on pourra écrire

$$f = AB - K^2(y_2\sigma[x_1] - y_1\sigma[x_2])^2 = o$$

ou, pour abréger,

$$f = AB - K^2P^2 = o.$$

Appliquons pour la détermination des fonctions φ_i et ψ_i, qui définissent s, le calcul du n° **10**, et cherchons l'intersection des coniques

$$f(\underline{x}, y) = 0, \qquad f(\underline{x} + \underline{dx}, y) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(\underline{x} + \underline{dx}, y) = \mathrm{B}\, d\mathrm{A} - 2\mathrm{K}^2 \mathrm{P}\, d\mathrm{P} = 0,$$

$$f(\underline{x}, y) = \mathrm{B}\,.\,\mathrm{A} - \mathrm{K}^2 \mathrm{P}\,.\,\mathrm{P} = 0.$$

Omettons les deux points y' et y''' (**10** et **50**)

$$\mathrm{B} = \mathrm{P} = 0,$$

le point y sera sur la droite $(y''y)$ ou (ωy)

$$0 = \begin{vmatrix} d\mathrm{A} & d\mathrm{P} \\ 2\mathrm{A} & \mathrm{P} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_i \mathrm{A}_i dx_i & \sum_i \mathrm{P}_i dx_i \\ \sum_i \mathrm{A}_i x_i & \sum_i \mathrm{P}_i x_i \end{vmatrix} = \mathrm{P}_1 r_1 + \mathrm{P}_2 r_2,$$

où l'on a posé

$$\mathrm{A}_i = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_i}, \qquad \mathrm{P}_i = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_i},$$

$$r_i = (\mathrm{A}\, u)_i, \qquad r_1 = \mathrm{A}_2 u_3 - \mathrm{A}_3 u_2, \qquad \ldots,$$

puisque d'ailleurs $\mathrm{P}_3 = 0$, et que $(x\, dx)_i$ peut être remplacé par u_i.

Or successivement

$$0 = \mathrm{P}_1 r_1 + \mathrm{P}_2 r_2 = y_2 \sigma[r_1] - y_1 \sigma[r_2],$$

$$(0') \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \alpha\, \sigma[r_1] \\ y_2 = \alpha\, \sigma[r_2] \end{array} \right\}, \qquad \alpha = \text{facteur de proportionnalité},$$

$$\mathrm{P}^2 = \begin{vmatrix} y_1 & \sigma[x_1] \\ y_2 & \sigma[x_2] \end{vmatrix}^2 = \alpha^2 \begin{vmatrix} \sigma[r_1] & \sigma[x_1] \\ \sigma[r_2] & \sigma[x_2] \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} r_1 & x_1 \\ r_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 \alpha^2 = 4\alpha^2 u_3^2 \mathrm{A}^2,$$

puisque σ a l'unité pour déterminant. Nous avons ainsi, pour déterminer y_3, l'équation suivante, après suppression de $\alpha\mathrm{A}$,

$$\alpha\, \sigma[r_1^2] - \sigma[r_2]\, y_3 = 4\mathrm{K}^2 \alpha u_3^2 \mathrm{A};$$

d'où

$$\sigma[r_2]y_3 = \alpha\{\sigma[r_1^2] - 4K^2\alpha_3^2 A\}.$$

Pareillement (o') deviennent

$$\sigma[r_2]y_1 = \sigma[r_1 r_2],$$
$$\sigma[r_2]y_2 = \sigma[r_2^2];$$

c'est-à-dire

$$\varphi_1 = \sigma[r_1 r_2],$$
$$\varphi_2 = \sigma[r_2^2],$$
$$\varphi_3 = \sigma[r_1^2] - 4K^2 u_3^2 A.$$

On peut remarquer que le déterminant de la conique $f(x, y) = 0$ est $A^2(A - K^2\sigma[x_2^2])$ à un coefficient constant près. Nous prendrons donc pour la critique $\mathfrak{A}$, la conique $\mathfrak{A} = A - K^2\sigma[x_2^2] = 0$ (**24**).

45. Passons à la construction des fonctions ψ_i. La primordiale puncto-linéaire de s est, après départ prévu (**24**) du facteur A, comme un calcul aisé le montre,

$$F(x, v) = \mathfrak{A}B' - K^2Q^2 = 0,$$
$$B' = 4v_2v_3 - v_1^2,$$
$$Q = v_1\sigma[x_2] + 2v_3\sigma[x_1].$$

On verra, comme dans le calcul des φ_i, que la droite v doit passer par le point

$$\begin{vmatrix} d\mathfrak{A} & dQ \\ 2\mathfrak{A} & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_i \mathfrak{A}_i dx_i & \sum_i Q_i dx_i \\ \sum_i \mathfrak{A}_i x_i & \sum_i Q_i x_i \end{vmatrix} = Q_1 \mathfrak{r}_1 + Q_2 \mathfrak{r}_2 = 0;$$

$$\mathfrak{r}_i = (\mathfrak{A}u)_i, \qquad \mathfrak{A}_i = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial Q}{\partial x_i}.$$

Or successivement

$$o = Q_1 \mathfrak{r}_1 + Q_2 \mathfrak{r}_2 = c_1 \sigma|\mathfrak{r}_2| + 2c_3 \sigma|\mathfrak{r}_1| = o;$$

$$(o) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = -\beta 2\sigma|\mathfrak{r}_1| \\ c_3 = \quad \beta \ \sigma|\mathfrak{r}_2| \end{array} \right\}, \qquad \beta = \text{facteur de proportionnalité};$$

$$Q^2 = 16\beta^2 u_3^2 \mathfrak{A}^2.$$

Il reste pour déterminer c_2 l'équation

$$c_2 \sigma|\mathfrak{r}_2| - \beta\sigma|\mathfrak{r}_1^2| = 4\beta K^2 u_3^2 \mathfrak{A};$$

d'où

$$\psi_1 = \sigma|\mathfrak{r}_2| c_1 = -2\sigma|\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2|,$$
$$\psi_2 = \sigma|\mathfrak{r}_2| c_2 = \sigma|\mathfrak{r}_1^2| + 4K^2 u_3^2 \mathfrak{A},$$
$$\psi_3 = \sigma|\mathfrak{r}_2| c_3 = \sigma|\mathfrak{r}_2^2|.$$

En définitive

$$s = \begin{vmatrix} x_1 & \sigma|r_1 r_2| \\ x_2 & \sigma|r_2^2| \\ x_3 & \sigma|r_1^2| - 4K^2 u_3^8 A \\ u_1 & -2\sigma|\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2| \\ u_2 & \sigma|\mathfrak{r}_1^2| + 4K^2 u_3^2 \mathfrak{A} \\ u_3 & \sigma|\mathfrak{r}_2^2| \end{vmatrix}.$$

On peut remarquer d'ailleurs que

$$\sigma|r_2| = \sigma|\mathfrak{r}_2|, \qquad \sigma|\mathfrak{r}_1| = \sigma|r_1| - 2K^2 u_3 \sigma|x_2|.$$

Pour avoir s^{-1}, il suffit évidemment dans f de transposer x_i et y_i ou, ce qui revient au même, de changer σ en σ^{-1}.

44. Il s'agit maintenant de ramener s à une *forme canonique* simple.

Reprenons

$$f = AB - K^2 P^2 = o,$$

$$P = y_2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) - y_1(a_{21}x_1 + a_{22}x_2),$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1.$$

Toute monistique

$$\delta = \begin{vmatrix} t_1 & t_1 + \delta' t_2 \\ t_2 & \delta t_2 \\ t_3 & \delta_{31} t_1 + \delta_{32} t_2 - \delta^{-1} t_3 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{31} = 2\delta' \delta^{-1} \\ \delta_{32} = \delta'^2 \delta^{-1} \end{array} \right\}$$

laisse invariable la forme binaire $t_1^2 - t_2 t_3$.

Effectuons dans $f = 0$, ce qui est licite vu l'équivalence, une monistique b de la forme δ sur les x_i et une monistique c de la forme δ sur les y_i. Il vient pour f

$$AB - K^2 P'^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} P' = & - a_{21} x_1 y_1 + x_2 y_2 (a_{12} bc - a_{21} b'c' + a_{11} cb' - a_{22} bc') \\ & + x_1 y_2 (a_{11} c - a_{21} c') - x_2 y_1 (a_{22} b + a_{21} b'). \end{aligned}$$

Si $a_{21} \neq 0$, il suffit de poser

$$a_{11} c = a_{21} c', \qquad a_{22} b = - a_{21} b', \qquad bc = a_{21}^2,$$

ce qui détermine toujours b, c, b', c' et d'une façon admissible (bc ni nul ni ∞), pour que P' devienne au signe près $a_{21}(x_1 y_1 + x_2 y_2)$ et alors, modifiant convenablement la valeur de K,

$$f = AB - K^2 (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 = 0.$$

Cela revient à faire dans l'expression de s (**45**)

$$\sigma = \begin{vmatrix} t_1 & - t_2 \\ t_2 & t_1 \end{vmatrix}.$$

Appelons π cette *forme canonique*.

Si $a_{21} = 0$, $a_{11} a_{22} = 1$; alors les équations

$$a_{11} c = a_{22} b, \qquad a_{12} bc + a_{11} cb' - a_{22} bc' = 0$$

donnent pour b, c, b', c' des valeurs acceptables (bc ni nul ni infini) et

telles qu'à un coefficient constant près P′ devienne $x_2y_1 - x_1y_2$. Alors, modifiant convenablement la valeur de K,

$$f = AB - K^2(x_2y_1 - x_1y_2)^2 = 0:$$

pour avoir cette seconde forme canonique ξ, il suffit donc dans s (**45**) de faire $\sigma = 1$.

45. On obtient d'ailleurs, en faisant respectivement dans s

$$\sigma = 1 \qquad \text{et} \qquad \sigma = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ -t_2 & t_1 \end{vmatrix},$$

$$\xi = \xi^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & r_1r_2 \\ x_2 & r_2^2 \\ x_3 & r_1^2 - 4K^2u_3^2A \\ u_1 & -2\mathfrak{r}_1r_2 \\ u_2 & \mathfrak{r}_1^2 + 4K^2u_3^2\mathfrak{A} \\ u_3 & r_2^2 \end{vmatrix} :$$

$$\mathfrak{A} = A - K^2x_2^2, \qquad \mathfrak{r}_1 = r_1 - 2K^2u_3x_2;$$

$$\pi = \pi^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & -r_1r_2 \\ x_2 & r_1^2 \\ x_3 & r_2^2 - 4K^2u_3^2A \\ u_1 & 2r_1\mathfrak{r}_2 \\ u_2 & \mathfrak{r}_2^2 + 4K^2u_3^2\mathfrak{A} \\ u_3 & r_1^2 \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{A} = A - K^2x_1^2, \qquad \mathfrak{r}_2 = r_2 + 2K^2x_1u_3.$$

46. Décomposons ξ en un produit de crémoniques. Partons de sa primordiale puncto-ponctuelle

$$f = AB - K^2(x_2y_1 - x_1y_2)^2 = 0$$

et appelons e et k les deux linéaires

$$e = e^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_3 \\ x_3 & u_2 \\ u_1 & x_1 \\ u_2 & x_3 \\ u_3 & x_2 \end{vmatrix}, \qquad k = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & -\tfrac{1}{4}K^{-2}x_2 \\ x_3 & x_3 \\ u_1 & u_1 \\ u_2 & -\tfrac{1}{4}K^2 u_2 \\ u_3 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Faisant usage du théorème du n° **11**, je trouve successivement pour les primordiales :

Puncto-ponctuelle de $\rho\xi\rho$,

$$x_2 x_3 y_2 y_3 - K^2(x_2 y_1 - x_1 y_2)^2 = 0;$$

puncto-linéaire de $\rho\xi\rho$,

$$\tfrac{1}{4}K^2 x_1 v_1 v_3 + \tfrac{1}{4}K^2 x_2 v_2 v_3 - x_3 v_1^2 = 0;$$

linéo-ponctuelle de $e\rho\xi\rho e$,

$$\tfrac{1}{4}K^2 u_1 y_1 y_2 + \tfrac{1}{4}K^2 u_3 y_2 y_3 - u_2 y_1^2 = 0;$$

linéo-ponctuelle de $\varpi e\rho\xi\rho e$,

$$\tfrac{1}{4}K^2 u_1 y_1 + \tfrac{1}{4}K^2 u_3 y_3 - u_2 y_2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$\tfrac{1}{4}K^2 y_1 = x_1, \qquad y_2 = x_2, \qquad \tfrac{1}{4}K^2 y_3 = x_3.$$

c'est-à-dire la monistique

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & -\tfrac{1}{4}K^{-2}x_2 \\ x_3 & x_3 \\ u_1 & u_1 \\ u_2 & -\tfrac{1}{4}K^2 u_2 \\ u_3 & u_3 \end{vmatrix} = k.$$

On a ainsi

$$\varpi e \rho \xi \rho e = k;$$
$$\xi = \rho e \varpi k e \rho.$$

Nous avons ainsi décomposé ξ en un produit de *trois* crémoniques ρ, $e\varpi ke$, ρ, dont *deux* équivalentes à ρ et *une* à ϖ.

47. Décomposons π en un produit de crémoniques. Partons encore de la primordiale

$$f = AB - K^2(x_1y_1 + x_2y_2)^2 = 0,$$

conservons les notations précédentes et posons de plus

$$k' = \begin{vmatrix} x_1 & -4K^2x_1 \\ x_2 & 4K^2x_2 \\ x_3 & x_3 - x_2 \\ u_1 & u_1 \\ u_2 & -u_2 - u_3 \\ u_3 & -4K^2u_3 \end{vmatrix}.$$

Je trouve successivement, faisant usage du théorème du n° **11**, pour les primordiales :

Puncto-ponctuelle de $\rho\pi$,

$$Ay_2y_3 - K^2(x_1y_1 + x_2y_2)^2 = 0;$$

puncto-linéaire de $\rho\pi$,

$$-Ac_1^2 - 4K^2x_1x_2c_1c_3 + 4K^2x_1^2c_2c_3 = 0;$$

puncto-ponctuelle de $e\rho\pi$,

$$-Ay_1^2 - 4K^2x_1x_2y_1y_2 + 4K^2x_1^2y_2y_3 = 0;$$

puncto-ponctuelle de $\varpi e\rho\pi$,

$$-Ay_2 - 4K^2x_1x_2y_1 + 4K^2x_1^2y_3 = 0;$$

puncto-linéaire de $e\varpi e\rho\pi$,

$$-Ac_3 - 4K^2x_1x_2c_1 + 4K^2x_1^2c_2 = 0;$$

puncto-linéaire de $e\varpi e\rho\pi\varpi$,

$$(x_3 - x_2)c_3 - 4K^2x_1c_1 + 4K^2x_2c_2 = 0:$$

on tire de là

$$y_1 = -4K^2x_1, \qquad y_2 = 4K^2x_2, \qquad y_3 = x_3 - x_2,$$

c'est-à-dire la monistique

$$\begin{vmatrix} x_1 & -4K^2x_1 \\ x_2 & 4K^2x_2 \\ x_3 & x_3 - x_2 \\ u_1 & u_1 \\ u_2 & -u_2 - u_3 \\ u_3 & -4K^2u_3 \end{vmatrix} = k'.$$

De l'égalité

$$e\varpi e\rho\pi\varpi = k'$$

on tire

$$\pi = \rho e\varpi ek'\varpi.$$

Ainsi π est le produit des trois crémoniques ρ, $e\varpi ek'$ et ϖ, dont *deux* sont équivalentes à ϖ et *une* à ρ.

48. Théorème. — *Les éléments fondamentaux de ξ sont les ∞ éléments adhérents au point ω, à la droite Ω, ou aux deux coniques Λ ou $\mathfrak{A}$.*

Il suffit de se reporter à l'expression de ξ pour voir qu'il faut chercher les éléments fondamentaux sur le connexe

$$r_2 = x_2u_1 + 2x_1u_3 = 0.$$

Ce connexe contient les ∞ éléments adhérents à ω ou à Ω, mais

aucun des autres ∞ éléments adhérents à un point ou à une droite. Pour les ∞ éléments adhérents à ω ou Ω, on vérifie qu'ils sont tous fondamentaux, $\varphi_i = \psi_i = 0$.

Cherchons s'il existe encore d'autres éléments fondamentaux. Des équations

$$r_2 = x_2 u_1 + 2x_1 u_3 = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0,$$

on tire, omettant le facteur de proportionnalité,

$$(0) \qquad u_1 = -2x_1 x_2, \qquad u_2 = 2x_1^2 - x_2 x_3, \qquad u_3 = x_2^2.$$

On ne peut avoir à la fois $u_i = 0$, puisque x n'est pas en ω par hypothèse.

Remplaçons, dans φ_i et ψ_i, u_i par leurs valeurs tirées de (0) : il vient

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \psi_2 = \psi_3 = 0,$$
$$-r_1 = 2x_2 \mathrm{A}, \qquad -\mathfrak{r}_1 = 2x_2 \mathfrak{A},$$
$$\varphi_3 = \psi_2 = 4x_2^2 \mathrm{A}\mathfrak{A}.$$

Ainsi x ne pouvant être ni en ω, ni sur Ω, doit être sur A ou $\mathfrak{A}$ pour que (x, u) soit fondamental.

Si x est sur A, il vient des (0)

$$u_1 = -2x_1, \qquad u_2 = x_3, \qquad u_3 = x_2;$$

c'est-à-dire que u_i est proportionnel à $\mathrm{A}_i = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_i}$, et (x, u) adhère à A.

Si x est sur $\mathfrak{A}$, les équations (0) donnent encore

$$u_1 = -2x_1, \qquad u_2 = x_3 + 2\mathrm{K}^2 x_2, \qquad u_3 = x_2;$$

u_i est donc proportionnel à $\mathfrak{A}_i = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_i}$, et (x, u) adhère à $\mathfrak{A}$.

Le théorème est ainsi démontré dans toutes ses parties.

49. Nous allons chercher les facteurs fondamentaux de ξ, c'est-à-dire ceux (**19**) qui se séparent de $\xi[\mathrm{P}]$, P étant une forme mixte irréductible. D'ailleurs, puisque

$$\xi = \rho e \varpi k e \rho,$$

au lieu d'effectuer dans P la crémonienne ξ, nous pouvons effectuer successivement ρ, e, ϖ, ... Disons, pour abréger le langage, qu'une crémonienne s *introduit* des facteurs (fondamentaux évidemment) si ces facteurs se séparent de $s[P]$, P étant une forme mixte irréductible. De plus, une crémonienne produit $s's$ introduit les facteurs fondamentaux de s et les transformées par s des facteurs fondamentaux s', déjà introduits par s'. Cela posé, on voit que les divers facteurs qui peuvent être introduits sont :

Pour ρ	x_2		
ρe	x_3		
$\rho e \varpi$	x_1	x_2	u_3
$\rho e \varpi k$	x_1	x_2	u_3
$\rho e \varpi k e$	u_1	u_3	x_2
$\rho e \varpi k e \rho$ ou ξ	x_2	u_3	r_2

il suffit, pour le voir, de se reporter aux expressions de ρ(**16**), e(**46**), ϖ(**16**), k(**46**).

Ainsi les facteurs fondamentaux de ξ doivent être cherchés dans la suite

$$r_2, \quad x_2, \quad u_3.$$

Si (x, u) est sur $r_2 = 0$, $(y, v) = \xi[(x, u)]$ coïncide avec l'élément focal, car alors

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \psi_1 = \psi_3 = 0.$$

Si (x, u) est sur le connexe $x_2 = 0$, il vient

$$\varphi_1 = 2u_1u_3, \qquad \varphi_2 = 4u_3^2, \qquad \varphi_3 = u_1^2 - 4K^2u_3^2,$$
$$\psi_1 = \ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on obtient en fonction de $u_1 : u_3$ la représentation paramétrique des coordonnées d'un point de $\mathfrak{A}$ et de la tangente en ce point; (y, v) adhère donc à $\mathfrak{A}$.

De même, si (x, u) est sur le connexe $u_3 = 0$, (y, v) adhère à A. Ainsi :

THÉORÈME. — *Les facteurs fondamentaux de ξ sont r_2, x_2 et u_3.*

Pour que r_2 se sépare de $\xi[P]$, il faut et il suffit que le connexe $P=0$ contienne l'élément focal. Pour que de $\xi[P]$ se sépare le facteur x_2 ou u_3, il faut et il suffit que $P=0$ contienne les ∞ éléments adhérents à $\mathfrak{A}$ ou à A respectivement.

50. Cherchons les éléments fondamentaux de π, lesquels sont évidemment situés sur le connexe $r_1=0$: ce connexe contient d'ailleurs les ∞ éléments adhérents aux points ω, ω', ω'' ou aux droites Ω, Ω', Ω''.

Nous vérifions aisément, en tenant compte de $K^2-1\neq 0$, puisque $\mathfrak{A}$ est indécomposable, que sont, parmi les ∞ éléments précités, fondamentaux l'élément (ω', Ω'') et les ∞ éléments adhérents à ω ou à Ω.

Cherchons maintenant s'il existe des éléments fondamentaux non adhérents à un côté, ou à un sommet du triangle des coordonnées.

Des deux équations

$$0=r_1=x_2u_2-x_3u_3=x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3$$

on tire, en omettant un facteur de proportionnalité,

$$(0)\qquad u_1=-2x_2x_3,\qquad u_2=x_1x_3,\qquad u_3=x_1x_2;$$

d'où

$$r_2=-2x_2\mathrm{A},\qquad \mathfrak{r}_2=-2x_2\mathfrak{A},$$
$$\varphi_3=\psi_2=4x_2^2\mathrm{A}\mathfrak{A}.$$

Pour que l'élément (x, u) soit fondamental, il faut que x soit :

Ou bien sur A, et alors les équations (0) montrent que u_i est proportionnel à A_i;

Ou bien sur $\mathfrak{A}$, et alors les équations (0) montrent que u_i est proportionnel à $\mathfrak{A}_i$.

Ainsi (x, u) adhère à A ou à $\mathfrak{A}$.

L'élément (ω', Ω'') cité plus haut comme fondamental adhère d'ailleurs aussi à A et à $\mathfrak{A}$. Ainsi :

THÉORÈME. — *Les éléments fondamentaux de π sont les ∞ éléments adhérents à* A, $\mathfrak{A}$, ω *ou* Ω.

51. Cherchons les facteurs fondamentaux de

$$\pi = \rho e \varpi e k' \varpi,$$

par la méthode déjà employée pour ξ.

On voit que la substitution

ρ introduit le facteur.....	x_2			
ρe.....	u_3			
$\rho e \varpi$.....	x_1	x_2	u_3	
$\rho e \varpi e$.....	u_1	u_3	x_2	
$\rho e \varpi e k'$.....	u_1	u_3	x_2	
$\rho e \varpi e k' \varpi$ ou π.....	x_1	x_2	r_1	u_3

Les facteurs fondamentaux de π doivent donc être cherchés dans la suite

$$x_1, \quad x_2, \quad u_3, \quad r_1.$$

Pour $x_1 = 0$,

$$\varphi_1 = u_1 u_2, \qquad \varphi_2 = u_2^2, \qquad \varphi_3 = u_1^2 - 4K^2 u_2 u_3.$$
$$\psi_1 = \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il y a donc ∞^2 points y et par suite ∞^2 éléments $\pi[(x, u)]$, (x, u) étant l'élément courant du connexe $x_1 = 0$. Le facteur x_1 n'est donc pas fondamental.

Au contraire, on vérifie, comme plus haut (**49**), que π transforme respectivement les ∞^2 éléments du connexe

$r_1 = 0$ en le seul élément focal (ω, Ω),

$x_2 = 0$ en les ∞ éléments adhérents à $\mathfrak{A}$,

$u_3 = 0$ » » A.

Ainsi :

Théorème. — *Les facteurs fondamentaux de π sont x_2, u_3 et r_1. Soit $P = 0$ l'équation d'un connexe irréductible. Pour qu'il se sépare de $\pi[P]$ les facteurs x_2, u_3, r_1 respectivement, il faut et il*

suffit que le connexe $P = 0$ *contienne les* ∞ *éléments adhérents à* $\mathfrak{A}$, *les* ∞ *éléments adhérents à* A, *l'élément focal.*

Nous avons ainsi établi les divers résultats annoncés dans l'Introduction et réuni les données nécessaires pour la construction, dans un second Mémoire, des groupes crémoniens quadratiques et d'ordre fini.

Lettre adressée à M. Hermite;

Par M. David HILBERT.

Pendant mon séjour à Paris, l'année dernière, vous avez eu la bonté de diriger mon attention sur l'analogie remarquable qui existe entre la théorie des invariants des formes binaires du quatrième, du cinquième degré, etc., et respectivement celle des formes cubiques ternaires, quaternaires, etc. Pour la forme binaire biquadratique et la forme ternaire cubique, cette analogie saute aux yeux le plus distinctement, aussitôt que nous nous servons pour la discussion de ces formes d'une certaine proposition générale que j'ai expliquée dans un travail dans les *Mathematische Annalen*, vol. XXVIII, p. 381.

Dans ce qui suit j'ai l'honneur de vous communiquer, en peu de mots, comment la théorie de ces formes se montre sous ce point de vue.

Soit

$$f = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4 = a_x^4$$

la forme primitive binaire et biquadratique. Premièrement cherchons toutes les formes quadratiques

$$\varphi = \alpha_0 x_1^2 + 2\alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 = \alpha_x^2,$$

pour lesquelles, par un choix convenable de la constante λ, on a la relation

$$(a\alpha)^2 a_x^2 = \lambda \alpha_x^2.$$

Après une élimination facile, nous sommes menés à l'équation cubique en λ

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - \lambda \\ a_1 & a_2 + \frac{\lambda}{2} & a_3 \\ a_2 - \lambda & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\lambda^3 - i\lambda - 2j = 0,$$

et, si nous employons le déterminant muni d'un bord

$$\Delta(x, y, \lambda) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - \lambda & y_2^2 \\ a_1 & a_2 + \frac{\lambda}{2} & a_3 & -y_1 y_2 \\ a_2 - \lambda & a_3 & a_4 & y_1^2 \\ x_2^2 & -x_1 x_2 & x_1^2 & 0 \end{vmatrix},$$

nous avons, pour fixer les formes cherchées,

$$\Delta(x, y, \lambda^{(1)}) = \varphi^{(1)}(x)\varphi^{(1)}(y),$$
$$\Delta(x, y, \lambda^{(2)}) = \varphi^{(2)}(x)\varphi^{(2)}(y),$$
$$\Delta(x, y, \lambda^{(3)}) = \varphi^{(3)}(x)\varphi^{(3)}(y),$$

ou, après l'identification des variables x_1, x_2 et y_1, y_2,

$$-\frac{\lambda^{(1)}}{2} f - h = \varphi^{(1)2},$$

$$-\frac{\lambda^{(2)}}{2} f - h = \varphi^{(2)2},$$

$$-\frac{\lambda^{(3)}}{2} f - h = \varphi^{(3)2},$$

où $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$ sont les trois racines de l'équation cubique et h est le hessien de la forme biquadratique. Puis, si nous désignons les symboles des formes $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(3)}$ respectivement avec les indices (1), (2), (3), nous avons, à cause de

$$(a\alpha^{(i)})a_x^2 = \lambda^{(i)}\alpha_x^{(i)2},$$
$$(a\alpha^{(k)})a_x^2 = \lambda^{(k)}\alpha_x^{(k)2},$$

les relations suivantes

$$(a\alpha^{(i)})^2(a\alpha^{(k)})^2 = \lambda^{(i)}(\alpha^{(i)}\alpha^{(k)})^2,$$
$$(a\alpha^{(k)})^2(a\alpha^{(i)})^2 = \lambda^{(k)}(\alpha^{(i)}\alpha^{(k)})^2$$

et par conséquent, pour $i \neq k$,

$$(\alpha^{(i)}\alpha^{(k)})^2 = 0,$$

c'est-à-dire que les invariants bilinéaires des formes $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(3)}$ s'évanouissent, tandis que leurs discriminants prennent les valeurs

$$(\alpha^{(1)}\alpha^{(1)})^2 = \frac{\partial\Delta(\lambda^{(1)})}{\partial\lambda^{(1)}} = -\tfrac{1}{2}(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})(\lambda^{(1)} - \lambda^{(3)}),$$

$$(\alpha^{(2)}\alpha^{(2)})^2 = \frac{\partial\Delta(\lambda^{(2)})}{\partial\lambda^{(2)}} = -\tfrac{1}{2}(\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)})(\lambda^{(2)} - \lambda^{(3)}),$$

$$(\alpha^{(3)}\alpha^{(3)})^2 = \frac{\partial\Delta(\lambda^{(3)})}{\partial\lambda^{(3)}} = -\tfrac{1}{2}(\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)})(\lambda^{(3)} - \lambda^{(2)}).$$

D'autre part, en cherchant toutes les formes binaires cubiques φ qui remplissent identiquement la relation

$$(f, \varphi)_2 = \lambda\varphi,$$

on arrive facilement aux résultats suivants. A chacune des deux valeurs

$$\lambda^{(1)} = +\sqrt{\frac{i}{3}} \qquad \text{et} \qquad \lambda^{(2)} = -\sqrt{\frac{i}{3}}$$

appartient un faisceau de formes cubiques $\varphi^{(1)}$ et $\varphi^{(2)}$, et ces deux faisceaux cubiques sont en même temps ceux qui ont la même forme biquadratique f comme jacobien. Du reste, de la même manière qu'au-

paravant, on obtient la valeur zéro pour l'invariant bilinéaire

$$(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})_3.$$

Voilà les résultats principaux et essentiellement connus de la théorie d'une forme binaire biquadratique, qui mènent facilement à la décomposition de la forme biquadratique et, d'autre part, à l'étude des dégénérations possibles de la forme biquadratique. Comme on le voit, ces résultats ont été déduits seulement au moyen d'un principe général, c'est-à-dire en cherchant toutes les formes qui se reproduisent par un certain mode d'opération invariantive. Dans ce qui suit je voudrais montrer que ce même point de vue suffit pour la résolution élégante de questions analogues dans la théorie d'une forme ternaire cubique.

Soit

$$f = a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_2 + \ldots + a_{333}x_3^3 = a_x^3$$

la forme primitive proposée. Premièrement, considérons des formes bilinéaires

$$\varphi = \alpha_{11}x_1u_1 + \alpha_{12}x_1u_2 + \ldots + \alpha_{33}x_3u_3 = \alpha_x u_\beta$$

avec une série de variables x_1, x_2, x_3 et une autre série de variables u_1, u_2, u_3 transformée par des substitutions inverses, et cherchons toutes ces formes φ pour lesquelles, par un choix convenable de λ, on a la relation identique

$$(u\alpha u)a_\beta a_x = \lambda\alpha_x u_\beta.$$

En comparant les coefficients des produits des variables x_1, x_2, x_3 et u_1, u_2, u_3, on obtient neuf équations qui permettent l'élimination des neuf grandeurs α_{11}, α_{12}, ..., α_{33}, d'où découle l'équation du neuvième degré pour λ

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -a_{133} & a_{132} & 0 & -a_{133} & a_{122} & 0 & -a_{132} & a_{123} \\ a_{133} & 0 & -a_{131} & a_{132}-\lambda & 0 & -a_{132} & -a_{122} & 0 & -a_{113} \\ -a_{132} & a_{131} & 0 & -a_{122} & a_{132} & 0 & -a_{12}-\lambda & a_{112} & 0 \\ 0 & -a_{131}-\lambda & a_{122} & 0 & -a_{223} & a_{224} & 0 & -a_{222} & a_{223} \\ a_{123} & 0 & -a_{132} & a_{223} & -\lambda & -a_{122} & a_{225} & 0 & -a_{123} \\ -a_{122} & a_{132} & 0 & -a_{122} & a_{122} & 0 & -a_{223} & a_{123}-\lambda & 0 \\ 0 & -a_{133} & a_{123}-\lambda & 0 & -a_{233} & a_{223} & 0 & -a_{333} & a_{233} \\ a_{133} & 0 & -a_{113} & a_{233} & 0 & -a_{123}-\lambda & a_{333} & 0 & -a_{133} \\ -a_{123} & a_{113} & 0 & -a_{223} & a_{132} & 0 & -a_{233} & a_{133} & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

ou, si nous calculons le déterminant et exprimons les coefficients des puissances de λ par les invariants fondamentaux S et T de la forme ternaire cubique,

$$\lambda\{\lambda^8 - 6S\lambda^4 - T\lambda^2 - 3S^2\} = 0.$$

A chacune des neuf racines de cette équation

$$\lambda = 0, \quad \lambda^{(1)}, \quad \lambda^{(2)}, \quad \lambda^{(3)}, \quad \lambda^{(4)}, \quad -\lambda^{(1)}, \quad -\lambda^{(2)}, \quad -\lambda^{(3)}, \quad -\lambda^{(4)},$$

appartient toujours une forme bilinéaire

$$\varphi = u_x, \quad \varphi^{(1)}, \quad \varphi^{(2)}, \quad \varphi^{(3)}, \quad \varphi^{(4)}, \quad \overline{\varphi}^{(1)}, \quad \overline{\varphi}^{(2)}, \quad \overline{\varphi}^{(3)}, \quad \overline{\varphi}^{(4)}.$$

Alors, si nous munissons le déterminant d'un bord à droite avec

$$y_1 v_1, \quad y_2 v_1, \quad y_3 v_1, \quad y_1 v_2, \quad y_2 v_2, \quad y_3 v_2, \quad y_1 v_3, \quad y_2 v_3, \quad y_3 v_3$$

et en bas avec

$$x_1 u_1, \quad x_2 u_1, \quad x_2 u_1, \quad x_1 u_2, \quad x_2 u_2, \quad x_3 u_2, \quad x_1 u_3, \quad x_2 u_3, \quad x_3 u_3,$$

nous serons en état de fixer les quatre paires de formes bilinéaires selon la formule

$$\Delta\begin{pmatrix} x, & u \\ y, & v \end{pmatrix} \lambda^{(i)} = \varphi^{(i)}(x, u)\overline{\varphi}^{(i)}(y, v), \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Du reste, par la même méthode qu'auparavant dans la discussion de la forme binaire biquadratique, nous obtenons les résultats

$$\alpha^{(i)}_{\beta^{(i)}} = 0, \qquad \overline{\alpha}^{(i)}_{\overline{\beta}^{(i)}} = 0,$$
$$\alpha^{(i)}_{\beta^{(k)}}\alpha^{(k)}_{\beta^{(i)}} = 0, \qquad \overline{\alpha}^{(i)}_{\overline{\beta}^{(k)}}\overline{\alpha}^{(k)}_{\overline{\beta}^{(i)}} = 0, \qquad \alpha^{(i)}_{\overline{\beta}^{(k)}}\overline{\alpha}^{(k)}_{\beta^{(i)}} = 0,$$

c'est-à-dire que tous les invariants linéaires et bilinéaires des formes φ et $\overline{\varphi}$ s'évanouissent, excepté les quatre suivants :

$$\alpha^{(i)}_{\overline{\beta}^{(i)}}\overline{\alpha}^{(i)}_{\beta^{(i)}} = \frac{\partial\Delta(\lambda^{(i)})}{\partial\lambda^{(i)}}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Pour nous rapprocher des résultats connus, nous transformons une des huit formes bilinéaires par une substitution linéaire dans la forme spéciale pour laquelle seulement les trois coefficients α_{11}, α_{22}, α_{33} demeurent finis. Alors la forme primitive f prend en même temps la forme canonique de Hesse et, abstraction faite de facteurs indifférents, nous avons les formules plus précises

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= u_1 x_1 + \varepsilon\, u_2 x_2 + \varepsilon^2 u_3 x_3 \\ \bar{\varphi} &= u_1 x_1 + \varepsilon^2 u_2 x_2 + \varepsilon\, u_3 x_3 \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

$$(\beta\bar{\beta}x)\alpha_x\bar{\alpha}_x = (\lambda^2 f - 3h) = x_1 x_2 x_3,$$

dans lesquelles nous reconnaissons la théorie des quatre triangles avec les neuf points d'inflexion.

D'autre part, si nous écrivons la forme primitive ternaire et cubique symboliquement

$$f = a_x^3 = b_x^3,$$

nous pouvons chercher toutes les formes ternaires quadratiques

$$\varphi = \alpha_{11} x_1^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + 2\alpha_{13} x_1 x_3 + \ldots + \alpha_{33} x_3^2 = \alpha_x^2,$$

qui remplissent identiquement la relation

$$(ab\alpha)^2 a_x b_x = \lambda \alpha_x^2.$$

On arrive à deux valeurs pour λ

$$\lambda^{(1)} = +2\sqrt{S} \qquad \text{et} \qquad \lambda^{(2)} = -2\sqrt{S},$$

dont chacune appartient à un certain système deux fois infini de coniques $\varphi^{(1)}$ et $\varphi^{(2)}$.

Comme on le voit, le principe expliqué mène à la construction d'invariants et covariants irrationnels et procure au moyen de ceux-ci une connaissance du sens propre et de la connexion analytique des formes invariantives rationnelles, quand même, comme il arrive dans des cas plus compliqués, le véritable calcul de tous les invariants et covariants résultants n'est plus praticable.

Mais nous pouvons modifier notre principe en divers sens, par exemple, si nous cherchons une forme binaire φ du degré r de telle nature que le covariant simultané $(f, \varphi)_i$ de celle-ci et d'une forme binaire donnée f du degré n contient la forme φ comme facteur. Dans le cas spécial $n = 2r - 2$ et $i = 2$, on obtient pour φ les formes de tous les faisceaux qui ont la même forme f comme jacobien et, pour $r = 4$, ce dernier problème a été traité sous un autre point de vue par MM. Brill (*Mathematische Annalen*, vol. XX, p. 330) et Stephanos (*Comptes rendus*, t. XCIII, p. 994).

Du reste, on peut spécialiser ladite méthode en cherchant simplement toutes les formes φ qui donnent un résultat s'annulant après une certaine opération invariantive sur la forme proposée f. Dans la discussion d'une forme binaire f du degré $n = 2r - 1$, on profite de cette méthode pour obtenir une forme φ du degré r dont les facteurs linéaires conduisent à la forme canonique. Mais je voudrais expliquer par un exemple que le même principe suffit pour établir la possibilité d'une forme canonique pour des formes à plusieurs variables.

Soit représentée la forme canonique d'une forme quaternaire cubique par

$$f = a_x^3 = l_1^3 + l_2^3 + l_3^3 + l_4^3 + l_5^3,$$

où l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 sont des formes linéaires dont les coefficients, regardés comme des coordonnées homogènes, peuvent définir cinq points p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 dans l'espace. Si nous cherchons ensuite toutes les formes quaternaires quadratiques $\varphi = u_\alpha^2$ avec des variables inverses u_1, u_2, u_3, u_4 qui remplissent la relation

$$a_\alpha^2 a_x = 0,$$

nous trouvons un certain système de formes cinq fois infini. Mais, d'autre part, nous savons, à cause de la forme canonique supposée, que cette condition est remplie par toutes les surfaces quadratiques ψ contenant les cinq points p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. Pour m'expliquer plus brièvement, je nomme un système spécial de formes dont chacune contient un certain nombre de points fondamentaux un *système naturel avec ces points fondamentaux*. Alors le problème de la représentation canonique d'une forme quaternaire cubique est le même que de trouver

un système naturel ψ, quatre fois infini, qui est contenu dans un système proposé φ cinq fois infini de formes quaternaires et quadratiques. Mais maintenant il est facile de montrer que la représentation canonique n'est possible que d'une seule manière; car, si

$$f = l_1^3 + l_2^3 + l_3^3 + l_4^3 + l_5^3$$

était une autre expression canonique où les coefficients des formes linéaires $l'_1, l'_2, l'_3, l'_4, l'_5$ donnent les cinq points $p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, p'_5$ dans l'espace, il serait nécessaire que le même système φ cinq fois infini de surfaces quadratiques contînt deux systèmes naturels, quatre fois infinis : premièrement le système de formes ψ avec les points fondamentaux p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et secondement le système de formes ψ' avec les points fondamentaux $p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, p'_5$. Par conséquent, il devrait exister quatre relations linéaires entre les formes ψ et ψ', c'est-à-dire que les dix points $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, p'_5$ seraient nécessairement situés de telle sorte qu'on puisse faire passer une surface quadratique par ces dix points et en même temps par trois points arbitraires de l'espace. Si nous supposons ces trois points dans le plan des points p'_1, p'_2, p'_3, on voit que les sept autres points p'_4, p'_5 et p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 seraient tous situés dans un autre plan, ce qui est exclu comme insignifiant. En même temps nous apprenons que la susdite expression canonique est susceptible de représenter toute forme donnée quaternaire et cubique dans toute sa généralité; car elle contient le nombre convenable de constantes indépendantes et une représentation indéterminée est inadmissible selon les réflexions que je viens de faire.

Voilà une démonstration simple du théorème fondamental dans la théorie de la forme quaternaire cubique; mais cette méthode est susceptible de généralisation pour d'autres formes. Par exemple, on trouve au moyen des mêmes considérations, comme auparavant, que toute forme ternaire du cinquième degré se laisse exprimer toujours d'une manière et d'une seule manière comme une somme de sept puissances de formes linéaires.

Ainsi l'on voit que divers problèmes de la théorie des formes peuvent se traiter pareillement, si l'on se place sous le point de vue que nous venons d'exposer.

Sur les équations les plus générales de la double réfraction compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel;

PAR M. MAURICE LÉVY,
Membre de l'Institut.

FORME DES ÉQUATIONS DE LA DOUBLE RÉFRACTION.

1. Quelque idée que l'on se fasse de la lumière polarisée dans un plan, qu'on la regarde comme l'effet d'un dérangement élastique ou diélectrique ou magnétique, qu'elle résulte de vibrations rectilignes ou de rotations moyennes (*vortices*) ou de toute autre cause, ce qui est certain, comme l'a déjà observé Maxwell, c'est que cette cause est mesurable par une grandeur qui est de la nature d'un vecteur. Nous appellerons ce vecteur le *vecteur lumineux*. Ce peut être une vibration ou une force, l'axe d'un *vortex* ou celui d'un moment magnétique, ou toute autre chose, et il s'agit, sans idée préconçue sur sa nature, d'en chercher l'expression la plus générale compatible avec la surface de l'onde.

2. Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point du milieu qui produit la lumière et, à l'instant t, par u, v, w les composantes du vecteur lumineux en ce point, en sorte que u, v, w sont trois fonctions inconnues des quatre variables indépendantes x, y, z, t.

Quelque théorie que l'on adopte, la continuité supposée du milieu

où se produit la lumière conduira toujours à un système d'équations aux différences partielles auquel devront satisfaire ces fonctions.

Le fait de l'interférence de la lumière montre que ces équations doivent être linéaires; et, si l'on fait d'abord abstraction de la dispersion et de la polarisation rotatoire, ces équations doivent être homogènes. Elles ne peuvent pas être du premier ordre, et parce qu'elles ne vérifieraient pas les lois expérimentales, et parce qu'elles doivent nécessairement contenir des forces accélératrices. On doit donc les regarder comme du second ordre.

D'ailleurs, toute onde plane paraît se propager avec la même vitesse dans les deux sens opposés qu'on peut attribuer à sa normale.

Ceci exige que les équations différentielles qui régissent u, v, w ne renferment que des dérivées d'ordre pair par rapport au temps, et, comme elles sont du second ordre, il n'y peut entrer, relativement au temps, que les trois dérivées

$$D_t^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad D_t^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad D_t^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Ces dérivées y entrent, d'ailleurs, nécessairement toutes les trois, puisque rien ne distingue les quantités u, v, w; si donc l'une d'elles manquait, elles devraient manquer toutes les trois, ce qui est impossible. Nous pouvons donc supposer les équations différentielles résolues par rapport à ces trois dérivées, et les écrire ainsi :

$$(1) \qquad \begin{cases} D_t^2 u = Au + Hv + G'w \\ D_t^2 v = H'u + Bv + Fw, \\ D_t^2 w = Gu + F'v + Cw, \end{cases}$$

A, B, C; F, G, H; F', G', H' étant trois fonctions symboliques homogènes et du second degré des trois symboles de dérivation D_x, D_y, D_z.

Les coefficients qui entrent dans ces équations peuvent, s'il s'agit de la propagation d'une onde lumineuse à travers un cristal, être des constantes ou des fonctions périodiques à courtes périodes de x, y, z. Mais, dans ce dernier cas, comme l'ont montré Cauchy, et depuis plus

complètement MM. Sarrau et Potier, les valeurs moyennes que l'on cherche pour u, v, w obéissent toujours à un système d'équations différentielles à coefficients constants.

Équations aux vitesses et aux vecteurs des ondes planes.

5. A présent, si

$$l, \quad m, \quad n$$

désignent les cosinus directeurs de la normale à une onde plane, en sorte que

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

et que ω soit sa vitesse de propagation, on sait que, pour obtenir l'équation qui fournit cette vitesse, il suffit :

1° De remplacer, dans les équations ci-dessus, les symboles

$$D_x, \quad D_y, \quad D_z, \quad D_t$$

respectivement par

$$l, \quad m, \quad n, \quad -\omega,$$

ce qui fournit trois équations homogènes et linéaires en u, v, w; ces équations déterminent la direction du vecteur;

2° D'égaler à zéro le déterminant de ces équations.

Ainsi la direction du vecteur est fournie par les équations

$$(1\ bis) \qquad \begin{cases} (A - \omega^2)u + Hv + G'w = 0, \\ H'u + (B - \omega^2)v + Fw = 0, \\ Gu + F'v + (C - \omega^2)w = 0, \end{cases}$$

où A, B, C; F, G, H; F', G', H' sont, à présent, neuf fonctions homogènes et du second degré, à coefficients constants, des trois cosinus l, m, n.

Et, si l'on pose

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A - \omega^2 & H & G' \\ H' & B - \omega^2 & F \\ G & F' & C - \omega^2 \end{vmatrix},$$

l'équation aux vitesses des ondes planes dans la direction caractérisée par les cosinus l, m, n est

$$(2\,bis) \qquad \Delta = 0,$$

équation du troisième degré en ω^2, qui montre qu'il se produit trois ondes en avant se propageant, en général, avec des vitesses différentes; et trois ondes en arrière se propageant respectivement avec les mêmes vitesses, et qu'il est par conséquent inutile d'envisager dans la discussion de l'équation.

Conditions générales de compatibilité avec la surface de l'onde de Fresnel.

4. Ce qui précède est vrai, quels que soient les axes de coordonnées; si l'on fait coïncider ces axes avec les axes d'élasticité d'un cristal à deux axes optiques, qu'on désigne par a, b, c les inverses de ses indices principaux de réfraction que je suppose essentiellement différents [1], et qu'on pose

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta = {} & (b^2 - \omega^2)(c^2 - \omega^2)\,l^2 \\ & + (c^2 - \omega^2)(a^2 - \omega^2)\,m^2 + (a^2 - \omega^2)(b^2 - \omega^2)\,n^2, \end{aligned} \right.$$

l'équation aux vitesses des ondes planes de Fresnel est

$$(3\,bis) \qquad \delta = 0,$$

équation du second degré en ω^2 qui fournit les vitesses des deux seules ondes produisant des rayons lumineux.

---

[1] Nous supposons ici que a, b, c sont essentiellement différents. Nous cherchons, en effet, les lois applicables à tous les cristaux, celles applicables aux cristaux à un axe ($a = b$) ou aux corps isotropes ($a = b = c$) devant être des conséquences de ces lois générales. Mais, des équations qui ne conviendraient qu'aux cristaux à un axe ou aux corps isotropes sans être comprises comme cas particuliers dans les équations générales relatives aux cristaux à deux axes ne pourraient pas représenter des lois naturelles. Elles seraient comme des solutions singulières n'ayant ici aucun intérêt.

La troisième onde, celle qui répond à la troisième racine de l'équation en ω^2, sera appelée, d'après Cauchy, l'*onde obscure*.

Les neuf fonctions A, B, C; F, G, H; F′, G′, H′ renferment 54 coefficients indéterminés. Le problème posé, envisagé dans toute sa généralité, consisterait à considérer ces 54 coefficients comme autant de fonctions inconnues des trois paramètres a^2, b^2, c^2, et à déterminer les expressions les plus générales possible de ces fonctions, pour lesquelles l'équation du troisième degré $\Delta = 0$ comprend les deux racines de l'équation $\delta = 0$, et cela quels que soient l, m, n, sous la seule réserve

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

ou, ce qui revient au même, les expressions les plus générales des cinquante-quatre fonctions inconnues pour lesquelles le polynôme Δ du troisième degré en ω^2 est divisible par celui du second degré δ, et cela quels que soient l, m, n, sous la seule réserve indiquée.

Car, si l'équation $\Delta = 0$ renferme les deux racines de l'équation $\delta = 0$, la surface de l'onde correspondant à la première de ces équations se décomposera en deux parties : l'une formée par la surface de Fresnel, l'autre répondant à l'onde obscure.

Théorème I. — *Pour que les équations différentielles* (1) *soient compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel, il est nécessaire que le polynôme homogène du sixième degré en l, m, n,*

$$\begin{vmatrix} A & H & G' \\ H' & B & F \\ G & F' & C \end{vmatrix},$$

où l, m, n sont regardés comme des grandeurs entièrement arbitraires, soit exactement divisible par le trinôme $l^2 + m^2 + n^2$.

En effet, nous avons dit que le polynôme Δ du troisième degré en ω^2 doit être divisible par celui du second δ, quels que soient l, m, n, sous la réserve $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Pour faire disparaître cette réserve, remplaçons, dans Δ, ω^2 par son

égal $\omega^2(l^2+m^2+n^2)$. Alors, ce déterminant devient homogène en l, m, n, et les trois racines ω^2 de l'équation

$$\Delta = 0$$

ne dépendent plus que des rapports $l : m : n$.

Posons, pour abréger,

$$\omega'^2 = \omega^2(l^2+m^2+n^2),$$

et appelons Δ' ce que devient Δ, si l'on y remplace ω^2 par ω'^2, de sorte que

$$(3') \qquad \Delta' = \begin{Bmatrix} A-\omega'^2 & H & G' \\ H' & B-\omega'^2 & F \\ G & F' & C-\omega'^2 \end{Bmatrix}.$$

A présent, si nous multiplions δ par $l^2+m^2+n^2$, il se trouve que le produit ne renferme plus que ω'^2. En posant

$$\delta' = \delta(l^2+m^2+n^2),$$

on a

$$(3'') \quad \delta' = \begin{cases} \omega'^4 - [(b^2+c^2)l^2+(c^2+a^2)m^2+(a^2+b^2)n^2]\omega'^2 \\ \qquad + (b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2)(l^2+m^2+n^2), \end{cases}$$

et les deux racines ω'^2 de l'équation $\delta = 0$, écrite sous la forme $\delta' = 0$, ne dépendent aussi que des rapports $l : m : n$.

Comme ces rapports sont entièrement arbitraires, il faut que Δ' soit exactement divisible par δ', quelles que soient les grandeurs l, m, n considérées comme des variables absolument indépendantes.

Ceci exige que le terme indépendant de ω^2 dans Δ' soit divisible par le terme analogue dans δ', et, par suite, qu'il soit divisible par

$$l^2+m^2+n^2.$$

Remarque. — Il faut que le déterminant désigné au théorème I soit

aussi divisible par

$$b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2,$$

quels que soient l, m, n.

THÉORÈME II. — *Si les équations* (1) *sont compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel, le carré de la vitesse de l'onde obscure, dont la normale est définie par les cosinus l, m, n, est fourni par l'expression*

$$(4)\quad \omega^2 = A + B + C - (b^2 + c^2)l^2 - (c^2 + a^2)m^2 - (a^2 + b^2)n^2.$$

En effet, l'équation $\Delta' = 0$ doit, d'après ce qui précède, comprendre les deux racines de $\delta' = 0$, quels que soient l, m, n, sans avoir égard à la relation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Or la somme des trois racines ω'^2 de Δ' est

$$\frac{A + B + C}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

La somme des deux racines de $\delta' = 0$ est

$$\frac{(b^2 + c^2)l^2 + (c^2 + a^2)m^2 + (a^2 + b^2)n^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Par suite, la troisième racine de Δ est la différence de ces deux expressions; d'où, pour cette troisième racine, la valeur

$$\begin{aligned}\omega'^2 &= A + B + C - (b^2 + c^2)l^2 - (c^2 + a^2)m^2 - (a^2 + b^2)n^2\\ &= \omega^2(l^2 + m^2 + n^2).\end{aligned}$$

Cette expression de ω^2 ne renferme, comme cela doit être, que les rapports $l : m : n$. Elle est vraie, que l, m, n soient égaux ou simplement proportionnels aux cosinus directeurs de la normale au plan de l'onde.

Dans la première hypothèse, l'expression de ω^2 est celle annoncée dans le théorème que nous voulions établir.

Corollaire. — *La surface de l'onde obscure est toujours du second degré.*

On appelle surface d'une onde l'enveloppe du plan mobile

$$lx + my + nz = \omega$$

ou

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

et où ω est la vitesse de l'onde.

Si cette vitesse est donnée par l'expression ci-dessus, on voit de suite que l'enveloppe cherchée est une surface du second degré.

Théorème III. — *Pour que les équations* (1) *soient compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel, il faut et il suffit que les neuf fonctions homogènes et du second degré en l, m, n,*

$$A, B, C; \quad F, G, H; \quad F', G', H'$$

satisfassent aux deux équations suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&FF' + GG' + HH' \\
&\quad = AB + BC + CA - (A + B + C) \\
&\qquad \times [(b^2 + c^2)l^2 + (c^2 + a^2)m^2 + (a^2 + b^2)] \\
&\qquad + [(b^2 + c^2)l^2 + (c^2 + a^2)m^2 + (a^2 + b^2)n^2]^2 \\
&\qquad - (b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2)(l^2 + m^2 + n^2), \\
&FGH + F'G'H' \\
&\quad = AFF' + BGG' + CHH' - ABC \\
&\qquad + [A + B + C - (b^2 + c^2)l^2 - (c^2 + a^2)m^2 - (a^2 + b^2)n^2] \\
&\qquad \times (b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2)(l^2 + m^2 + n^2).
\end{aligned}\right.$$

En effet, pour avoir toutes les conditions cherchées, il faut et il suffit d'exprimer que Δ' est identique au produit

$$\delta'[A + B + C - (b^2 + c^2)l - (c^2 + a^2)m^2 - (a^2 + b^2)n^2].$$

Les coefficients de ω'^6 et de ω'^4 étant déjà les mêmes dans les deux expressions, leur identité n'exige que deux équations de condition qui sont précisément celles indiquées.

Remarque. — La première (5), qui a lieu entre les polynômes homogènes du quatrième degré, fournit entre les 54 coefficients qui entrent dans les équations

$$\frac{5 \times 6}{2} = 15 \text{ conditions.}$$

La seconde, qui a lieu entre des polynômes du sixième degré, fournit

$$\frac{7 \times 8}{2} = 28 \text{ conditions,}$$

soit en tout 43 conditions. La solution la plus générale comporterait, d'après cela, 11 constantes arbitraires. Mais, les équations de condition n'étant pas linéaires, on voit que le problème peut comporter beaucoup de solutions ayant chacune des arbitraires.

Applications aux équations symétriques.

5. On sait que, au point de vue optique, les cristaux, même ceux qui n'appartiennent pas au système terbinaire, se comportent comme s'ils possédaient trois plans de symétrie, et toutes les théories mathématiques de la double réfraction proposées jusqu'ici ont conduit à des équations différentielles symétriques par rapport à ces plans. Quoique, comme nous le verrons plus loin, la symétrie dans les équations différentielles ne soit pas, si l'on se place au point de vue purement mathématique, une conséquence toujours nécessaire de la symétrie des phénomènes optiques, la recherche des équations symétriques les plus générales possibles offre évidemment un intérêt tout particulier et fera l'objet principal de ces recherches. Il est naturel, en effet, d'admettre que le vecteur, quelle qu'en soit la nature, cause d'un phénomène symétrique par rapport à trois plans, doit lui-même être symétrique par rapport à ces plans.

Dans cette hypothèse, les 54 coefficients qui entrent dans les équa-

tions générales se réduisent à 15. En effet, les équations devant rester inaltérées, si l'on change de signes simultanément, soit u et x, soit v et y, soit w et z, sont nécessairement de la forme suivante :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mathrm{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{h}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathrm{g}'\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \gamma'\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \beta'\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mathrm{h}'\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mathrm{b}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mathrm{f}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z},\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mathrm{g}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mathrm{f}'\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mathrm{c}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + \alpha'\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y},
\end{aligned}\right.$$

où a, b, c ; f, g, h ; f′, g′, h′ ; α, β, γ ; α', β', γ' sont les quinze coefficients à déterminer en fonction de a^2, b^2, c^2.

Le déterminant Δ, si l'on y remplace, comme il a été dit plus haut, ω^2 par $\omega^2(l^2+m^2+n^2)$, devient

$$(6\,bis)\quad \Delta = \begin{vmatrix}
(\mathrm{a}-\omega^2)l^2 + (\mathrm{h}-\omega^2)m^2 + (\mathrm{g}'-\omega^2)n^2 & \gamma' lm & \beta' ln\\
\gamma' ml & (\mathrm{h}'-\omega^2)l^2 + (\mathrm{b}-\omega^2)m^2 + (\mathrm{f}-\omega^2)n^2 & \alpha mn\\
\beta nl & \alpha' nm & (\mathrm{g}-\omega^2)l^2 + (\mathrm{f}'-\omega^2)m^2 + (\mathrm{c}-\omega^2)n^2
\end{vmatrix}.$$

Par suite, les neuf fonctions A, B, C, F, G, H, F′, G′, H′ deviennent ici

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{A} = \mathrm{a}l^2 + \mathrm{h}m^2 + \mathrm{g}'n^2,\\
&\mathrm{B} = \mathrm{h}'l^2 + \mathrm{b}m^2 + \mathrm{f}n^2,\\
&\mathrm{C} = \mathrm{g}l^2 + \mathrm{f}'m^2 + \mathrm{c}n^2,\\
&\mathrm{F} = \alpha mn, \qquad \mathrm{F}' = \alpha' mn,\\
&\mathrm{G} = \beta nl, \qquad \mathrm{G}' = \beta' nl,\\
&\mathrm{H} = \gamma lm, \qquad \mathrm{H}' = \gamma' lm.
\end{aligned}\right.$$

La vitesse de la troisième onde est donnée, en vertu du théorème I, par

$$(7\,bis)\quad \left\{\begin{aligned}
\omega^2 = (\mathrm{a}+\mathrm{h}'+\mathrm{g}-b^2-c^2)l^2 &+ (\mathrm{h}+\mathrm{b}+\mathrm{f}'-c^2-a^2)m^2\\
&+ (\mathrm{g}'+\mathrm{f}+\mathrm{c}-a^2-b^2)n^2.
\end{aligned}\right.$$

Il suffirait de porter les expressions (7) dans (5) pour obtenir les relations cherchées entre les quinze coefficients.

Mais la discussion se simplifie beaucoup en procédant dans un ordre un peu différent.

Premières conditions à remplir.
(216 solutions possibles.)

6. Pour que le polynôme Δ' (6 *bis*) soit divisible par δ' et, par suite, par

$$\delta' = (b^2 - \omega^2)(c^2 - \omega^2)l^2 + (c^2 - \omega^2)(a^2 - \omega^2)m^2 + (a^2 - \omega^2)(b^2 - \omega^2),$$

il faut d'abord que le coefficient de l^6 dans le dividende, c'est-à-dire

$$(\mathrm{a} - \omega^2)(\mathrm{h}' - \omega^2)(\mathrm{g} - \omega^2),$$

soit divisible par le coefficient de l^2 dans le diviseur, c'est-à-dire par

$$(b^2 - \omega^2)(c^2 - \omega^2).$$

Ceci ne peut avoir lieu que de six manières, à savoir pour les valeurs

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{g} = b^2, & \mathrm{h}' = c^2 \\ \mathrm{g} = c^2, & \mathrm{h}' = b^2 \end{array}\right\} \mathrm{a}' \text{ arbitraire,}$$
$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{a} = b^2, & \mathrm{g} = c^2 \\ \mathrm{a} = c^2, & \mathrm{g} = b^2 \end{array}\right\} \mathrm{h}' \text{ arbitraire,}$$
$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{a} = b^2, & \mathrm{h}' = c^2 \\ \mathrm{a} = c^2, & \mathrm{h}' = b^2 \end{array}\right\} \mathrm{g} \text{ arbitraire.}$$

Si l'on exprime de même que le coefficient de m^6 dans Δ' est divisible par

$$(c^2 - \omega^2)(a^2 - \omega^2),$$

on obtient six paires d'équations analogues, à savoir

$$(8') \quad \left\{ \begin{array}{ll} \left.\begin{array}{ll} \mathrm{h} = c^2, & \mathrm{f} = a^2 \\ \mathrm{h} = a^2, & \mathrm{f}' = c^2 \end{array}\right\} & \mathrm{b} \text{ arbitraire,} \\ \left.\begin{array}{ll} \mathrm{b} = c^2, & \mathrm{h} = a^2 \\ \mathrm{b} = a^2, & \mathrm{h} = c^2 \end{array}\right\} & \mathrm{f}' \text{ arbitraire,} \\ \left.\begin{array}{ll} \mathrm{b} = c^2, & \mathrm{f}' = a^2 \\ \mathrm{b} = a^2, & \mathrm{f} = c^2 \end{array}\right\} & \mathrm{h} \text{ arbitraire,} \end{array} \right.$$

et enfin, si l'on exprime que le coefficient de n^6 est divisible par

$$(a^2 - \omega^2)(b^2 - \omega^2),$$

on obtient de même les six systèmes de valeurs

$$(8'') \quad \left\{ \begin{array}{ll} \left.\begin{array}{ll} \mathrm{f} = a^2, & \mathrm{g}' = b^2 \\ \mathrm{f} = b^2, & \mathrm{g} = a^2 \end{array}\right\} & \mathrm{c} \text{ arbitraire,} \\ \left.\begin{array}{ll} \mathrm{c} = a^2, & \mathrm{f} = b^2 \\ \mathrm{c} = b^2, & \mathrm{f} = a^2 \end{array}\right\} & \mathrm{g}' \text{ arbitraire,} \\ \left.\begin{array}{ll} \mathrm{c} = a^2, & \mathrm{g}' = b^2 \\ \mathrm{c} = b^2, & \mathrm{g}' = a^2 \end{array}\right\} & \mathrm{f} \text{ arbitraire.} \end{array} \right.$$

On satisfera à la triple condition de la divisibilité des coefficients de l^6, m^6, n^6 dans le dividende respectivement par ceux de l^2, m^2, n^2 dans le diviseur, en prenant simultanément l'un quelconque des six systèmes de valeurs (8) avec l'un de ceux de (8') et l'un de ceux de (8''), ce qui fournit $6^3 = 216$ solutions.

Théorème IV. — *Les deux cent seize solutions se divisent en vingt-sept groupes, dont chacun fournit une seule expression pour la vitesse de l'onde obscure.*

Chacune des deux cent seize solutions détermine six des neuf constantes

$$\mathsf{a},\quad \mathsf{b},\quad \mathsf{c};\quad \mathsf{f},\quad \mathsf{g},\quad \mathsf{h};\quad \mathsf{f}',\quad \mathsf{g}',\quad \mathsf{h}',$$

et laisse les trois autres *entièrement arbitraires*.

Les trois coefficients restant arbitraires sont nécessairement groupés ainsi : un de ceux a, h', g indiqués comme arbitraires dans (8); un de ceux b, f', h indiqués comme arbitraires dans (8′), et enfin un de ceux indiqués comme arbitraires dans (8″).

Si l'on écrit

$$\begin{matrix} \mathsf{a}, & \mathsf{h}', & \mathsf{g}, \\ \mathsf{h}, & \mathsf{b}, & \mathsf{f}', \\ \mathsf{g}', & \mathsf{f}, & \mathsf{c}, \end{matrix}$$

il y a vingt-sept groupes de trois lettres prises chacune dans l'une des lignes horizontales. Ce sont les vingt-sept groupes composés chacun de huit solutions comprenant les mêmes trois arbitraires.

Si, par exemple, on laisse a, b, c arbitraires, on peut combiner de huit manières les deux premières lignes d'équations fournies respectivement par (8), (8′), (8″); et de même pour chaque groupe donné d'arbitraires. Mais quelle que soit celle des huit solutions qu'on choisit dans un groupe, il se trouve que l'équation (7 *bis*) fournit la même vitesse pour la troisième onde. Si on laisse a, b, c arbitraires, quelle que soit celle des huit solutions correspondantes que l'on adopte, on trouve

$$\omega^2 = \mathsf{a}l^2 + \mathsf{b}m^2 + \mathsf{c}n^2$$

et généralement, si α_1, α_2, α_3 sont les trois coefficients laissés arbitraires (α_1 étant a, h', ou g; α_2 étant b, f', ou h; α_3 étant c, g', ou f), la vitesse de la troisième onde sera

$$\omega^2 = \alpha_1 l^2 + \alpha_2 m^2 + \alpha_3 n^3.$$

Il n'y a donc que vingt-sept expressions distinctes possibles pour cette vitesse, chaque expression convenant à huit solutions.

Six seulement des deux cent seize solutions précédentes, physiquement admissibles.

7. Au point de vue purement analytique, les deux cent seize solutions dont il vient d'être parlé seraient toutes admissibles. Il n'en est pas de même au point de vue physique. Rien, en effet, ne distingue les trois indices de réfraction $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ du cristal. Par suite, les équations différentielles doivent présenter une composition symétrique par rapport aux trois plans coordonnés. A ce point de vue, les quinze coefficients se divisent en cinq groupes, à savoir :

(1°)	a,	b,	c;
(2°)	f,	g,	h;
(3°)	f',	g',	h';
(4°)	α,	β,	γ;
(5°)	α',	β',	γ'.

Dans chaque groupe on passe d'un coefficient aux deux autres par une permutation tournante des axes, et comme rien ne distingue les trois axes, le premier coefficient de chaque groupe étant une certaine fonction de a^2, b^2, c^2, les deux autres s'en déduisent par des permutations de ces lettres.

De là résulte que, dès que l'on a choisi une des six solutions du premier de l'un des trois groupes d'équations de condition écrites plus haut, la solution correspondante à adopter dans chacun des deux autres groupes s'ensuit, de sorte qu'au point de vue physique les 6^3 solutions trouvées se réduisent à six, savoir :

Solution A.

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{f} = \mathrm{f}' = a^2 \\ \mathrm{g} = \mathrm{g}' = b^2 \\ \mathrm{h} = \mathrm{h}' = c^2 \end{array}\right\} \mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c} \text{ arbitraires.}$$

Solution B.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{f}+\mathrm{h}'=b^2 \\ \mathrm{g}+\mathrm{f}'=c^2 \\ \mathrm{h}+\mathrm{g}'=a^2 \end{array}\right\} \text{a, b, c arbitraires.}$$

Solution C.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{a}+\mathrm{f}=b^2 \\ \mathrm{b}+\mathrm{g}=c^2 \\ \mathrm{c}+\mathrm{h}=a^2 \end{array}\right\} \text{f', g', h' arbitraires.}$$

Solution D.

$$(9)\quad \left.\begin{array}{l} \mathrm{a}+\mathrm{h}=c^2 \\ \mathrm{b}+\mathrm{f}=a^2 \\ \mathrm{c}+\mathrm{g}=b^2 \end{array}\right\} \text{f', g', h' arbitraires.}$$

Solution E.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{a}+\mathrm{f}'=c^2 \\ \mathrm{b}+\mathrm{g}'=a^2 \\ \mathrm{c}+\mathrm{h}=b^2 \end{array}\right\} \text{f, g, h arbitraires.}$$

Solution F.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{a}+\mathrm{g}'=b^2 \\ \mathrm{b}+\mathrm{h}=c^2 \\ \mathrm{c}+\mathrm{f}'=a^2 \end{array}\right\} \text{f, g, h arbitraires.}$$

La vitesse de l'onde obscure, d'après (7 *bis*), est, à savoir :

Solutions A *et* B.

$$\omega^2=\mathrm{a}l^2+\mathrm{b}m^2+\mathrm{c}n^2.$$

Solutions C *et* D.

$$(10)\quad \omega^2=\mathrm{h}'l^2+\mathrm{f}'m^2+\mathrm{g}'n^2.$$

Solutions E *et* F.

$$\omega^2=\mathrm{g}l^2+\mathrm{h}m^2+\mathrm{f}n^2.$$

Conditions restant à remplir.

8. Les conditions précédentes déterminent six des quinze coefficients entrant dans les équations différentielles (6) qu'il s'agit de constituer.

Les neuf autres, à savoir

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma;\quad \alpha',\quad \beta',\quad \gamma',$$

et les trois restés arbitraires dans les expressions (9) doivent encore satisfaire aux conditions (5).

Ces conditions, en appelant ω^2 la vitesse de la troisième onde et en vertu de (7 *bis*), peuvent s'écrire

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha\alpha' m^2 n^2 + \beta\beta' n^2 l^2 + \gamma\gamma' l^2 m^2 \\ \qquad = \left\{\begin{array}{l} \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA} \\ -\omega^2[(b^2+c^2)l^2 + (c^2+a^2)m^2 + (a^2+b^2)n^2] \\ -(b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2)(l^2+m^2+n^2), \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} (\alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma')l^2m^2n^2 \\ \qquad = \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}\alpha\alpha' m^2 n^2 + \mathrm{B}\beta\beta' n^2 l^2 + \mathrm{C}\gamma\gamma' l^2 m^2 - \mathrm{ABC} \\ \quad + \omega^2(b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2)(l^2+m^2+n^2). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Il reste, dans ces équations, à remplacer A, B, C et ω^2 par leurs valeurs (7), (9) et (10). Ces valeurs changent avec les solutions.

Solution A.

(Elle fournit $2 \times \infty^5$ manières d'obtenir la surface de l'onde de Fresnel.)

9. Les équations (7) et (9) donnent

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \mathsf{a}l^2 + c^2m^2 + b^2n^2, \\ \mathrm{B} &= c^2l^2 + \mathsf{b}m^2 + a^2n^2, \\ \mathrm{C} &= b^2l^2 + a^2m^2 + \mathsf{c}n^2. \end{aligned}$$

Et, en ayant égard à la première expression (10) de ω^2, on voit de suite que dans la première des équations (11) les termes de l^4, m^4, n^4 disparaissent d'eux-mêmes et que le coefficient de $m^2 n^2$ dans le second membre se réduit à

$$(\mathbf{b} - a^2)(\mathbf{c} - a^2),$$

d'où l'on déduit la première des équations suivantes, les autres étant symétriques,

$$(13)\qquad \begin{cases} \alpha\alpha' = (\mathbf{b} - a^2)(\mathbf{c} - a^2), \\ \beta\beta' = (\mathbf{c} - b^2)(\mathbf{a} - b^2), \\ \gamma\gamma' = (\mathbf{a} - c^2)(\mathbf{b} - c^2), \end{cases}$$

comme nécessaires et suffisantes pour satisfaire à l'équation (11).

Si l'on porte ces valeurs et celles de A, B, C, ω^2 dans l'équation (12), on vérifie de suite que les termes en l^6 et $l^4 m^2$ se détruisent et que, par suite, il en est de même, par symétrie, de tous les autres, sauf celui en $l^2 m^2 n^2$. Le coefficient de ce dernier devient, après quelques réductions et groupements de termes,

$$(\mathbf{a} - b^2)(\mathbf{b} - c^2)(\mathbf{c} - a^2) + (\mathbf{a} - c^2)(\mathbf{b} - a^2)(\mathbf{c} - b^2).$$

Donc l'équation (12) est satisfaite par la seule condition

$$(14)\qquad \begin{cases} \alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma' \\ \quad = (\mathbf{a} - b^2)(\mathbf{b} - c^2)(\mathbf{c} - a^2) + (\mathbf{a} - c^2)(\mathbf{b} - a^2)(\mathbf{c} - b^2). \end{cases}$$

Nous avons ainsi satisfait à toutes les conditions du problème, et la solution A :

1° Détermine entièrement six des quinze coefficients qui entrent dans les équations différentielles, à savoir

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}' = a^2,$$
$$\mathbf{g} = \mathbf{g}' = b^2,$$
$$\mathbf{h} = \mathbf{h}' = c^2;$$

2° Laisse entièrement arbitraires trois autres coefficients, à savoir

$$\mathsf{a}, \quad \mathsf{b}, \quad \mathsf{c};$$

3° Établit entre les six coefficients restants α, β, γ; α', β', γ' quatre relations, à savoir, celles (13) et (14). Ces quatre équations permettent d'exprimer les six coefficients dont il s'agit en fonction de deux constantes arbitraires, de sorte que cette première solution comporte en tout cinq constantes arbitraires. Il y a plus, on peut satisfaire aux équations (13) et (14) de deux manières. En effet, les équations (13) donnent

$$\begin{aligned}&\alpha\beta\gamma \times \alpha'\beta'\gamma' \\ &\quad = (\mathsf{a} - b^2)(\mathsf{b} - c^2)(\mathsf{c} - a^2) \times (\mathsf{a} - c^2)(\mathsf{b} - a^2)(\mathsf{c} - b^2).\end{aligned}$$

Cette équation combinée avec l'équation (14) donne les deux solutions

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha'\beta'\gamma' &= (\mathsf{a} - c^2)(\mathsf{b} - a^2)(\mathsf{c} - b^2) \\ \alpha\beta\gamma &= (\mathsf{a} - b^2)(\mathsf{b} - c^2)(\mathsf{c} - b^2) \end{aligned} \right.$$

ou

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha'\beta'\gamma' &= (\mathsf{a} - b^2)(\mathsf{b} - c^2)(\mathsf{c} - a^2). \\ \alpha\beta\gamma &= (\mathsf{a} - c^2)(\mathsf{b} - a^2)(\mathsf{c} - b^2), \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, si λ, μ, ν sont trois constantes arbitraires, on tire de (15) et (13)

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\lambda}{\mu}(c^2 - a^2), & \alpha' &= \frac{\lambda}{\mu}(\mathsf{b} - a^2), \\ \beta &= \frac{\mu}{\nu}(\mathsf{a} - b^2), & \beta' &= \frac{\mu}{\lambda}(\mathsf{c} - b^2), \\ \gamma &= \frac{\nu}{\lambda}(\mathsf{b} - c^2), & \gamma' &= \frac{\nu}{\lambda}(\mathsf{a} - c^2); \end{aligned} \right.$$

de (16) et (13),

$$(17\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\lambda}{\mu}(\mathsf{b} - a^2), & \alpha' &= \frac{\lambda}{\nu}(\mathsf{c} - a^2), \\ \beta &= \frac{\mu}{\nu}(\mathsf{c} - b^2), & \beta' &= \frac{\mu}{\lambda}(\mathsf{a} - b^2), \\ \gamma &= \frac{\nu}{\lambda}(\mathsf{a} - c^2), & \gamma' &= \frac{\nu}{\mu}(\mathsf{b} - c^2). \end{aligned} \right.$$

La solution A se dédouble ainsi d'après les valeurs (17) et (17 *bis*) des six constantes α, β, γ; α', β', γ'.

Les valeurs de f, g, h, f', g', h' sont communes aux deux solutions, et celles a, b, c restent arbitraires dans l'une et l'autre. Nous désignerons par A_1 et A_2 les deux solutions résultant respectivement des valeurs (17) et (17 *bis*), et alors les équations différentielles cherchées deviennent définitivement :

Solution A_1.

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mathsf{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\lambda}(\mathsf{b}-c^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\mu}{\lambda}(\mathsf{c}-b^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mathsf{b}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a^2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\mu}(\mathsf{a}-c^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + \frac{\lambda}{\mu}(\mathsf{c}-a^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z},\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mathsf{c}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\mu}{\nu}(\mathsf{a}-b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + \frac{\lambda}{\nu}(\mathsf{b}-a^2)\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}.
\end{aligned}\right.$$

Solution A_2.

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mathsf{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\lambda}(\mathsf{a}-c^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\mu}{\lambda}(\mathsf{a}-b^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mathsf{b}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a^2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\mu}(\mathsf{b}-c^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + \frac{\lambda}{\mu}(\mathsf{b}-a^2)\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial y},\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mathsf{c}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\mu}{\nu}(\mathsf{c}-b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + \frac{\lambda}{\nu}(\mathsf{c}-a^2)\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}.
\end{aligned}\right.$$

D'après l'expression (10) de la vitesse de la troisième onde, on voit donc que sur, les cinq constantes arbitraires a, b, c; $\lambda : \mu : \nu$ entrant dans les deux solutions obtenues, celles a, b, c servent à caractériser la troisième onde. Elles sont nulles si l'on suppose la vitesse de cette onde nulle; les deux solutions deviennent alors identiques.

Cette troisième onde n'a jamais été observée. Il ne s'ensuit pas toutefois qu'on puisse d'emblée faire $\mathsf{a} = \mathsf{b} = \mathsf{c} = 0$; si a, b, c sont négatifs, la valeur (20) de ω est imaginaire et la troisième onde n'existe pas.

Quant aux deux rapports $\lambda : \mu : \nu$, ils influent évidemment sur la direction du vecteur lumineux (vibration lumineuse dans la théorie ordinaire) et montre qu'*il n'y a pas que des vibrations situées dans le*

plan de polarisation ou perpendiculaires à ce plan qui fournissent la surface de l'onde de Fresnel, mais des infinités d'autres directions.

Nous reviendrons plus loin, d'une façon spéciale, sur la direction du vecteur, sur laquelle il peut se faire qu'influent non seulement les constantes λ, μ, ν, mais aussi celles a, b, c. Les premières n'influent pas sur la vitesse de l'onde obscure; d'ailleurs aucune des cinq n'influe sur la vitesse des ondes lumineuses : c'est par cette condition qu'elles sont obtenues; mais il arrive parfois que toutes les cinq influent sur la direction des vecteurs.

Solution B.

(Elle fournit aussi $2 \times \infty^3$ manières d'arriver à la surface de l'onde de Fresnel.)

10. Les équations (9) déterminent les mêmes coefficients f, g, h; f', g', h' que dans les solutions précédentes, mais par des valeurs différentes, à savoir

$$(20)\qquad \begin{cases} \mathsf{f}' = \mathsf{g} = c^2, \\ \mathsf{g}' = \mathsf{h} = a^2, \\ \mathsf{h}' = \quad = b^2. \end{cases}$$

Les équations (7) donnent par suite

$$(21)\qquad \begin{cases} \mathrm{A} = \mathsf{a}l^2 + a^2(m^2 + n^2), \\ \mathrm{B} = \mathsf{b}m^2 + b^2(n^2 + l^2), \\ \mathrm{C} = \mathsf{c}n^2 + c^2(l^2 + m^2). \end{cases}$$

En portant ces valeurs et celle de ω^2 donnée par la première (10) dans (11), on reconnaît que, pour y satisfaire, il faut et il suffit que

$$(22)\qquad \begin{cases} \alpha\alpha' = (\mathsf{a} - b^2)(\mathsf{b} - a^2), \\ \beta\beta' = (\mathsf{b} - c^2)(\mathsf{c} - b^2), \\ \gamma\gamma' = (\mathsf{c} - a^2)(\mathsf{a} - c^2). \end{cases}$$

En portant ces valeurs et celles ci-dessus dans (12), on reconnaît de

même que, pour la satisfaire, il faut et il suffit que

$$(23)\quad \begin{cases} \alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma' = (\mathsf{a} - b^2)(\mathsf{b} - c^2)(\mathsf{c} - a^2) \\ \qquad\qquad + (\mathsf{a} - c^2)(\mathsf{b} - a^2)(\mathsf{c} - b^2), \end{cases}$$

et de là on tirera, comme précédemment, λ, μ, ν étant trois constantes arbitraires, soit

$$(24)\quad \begin{cases} \alpha = \frac{\lambda}{\mu}(\mathsf{c} - b^2), & \alpha' = \frac{\lambda}{\nu}(\mathsf{b} - c^2), \\ \beta = \frac{\mu}{\nu}(\mathsf{a} - c^2), & \beta' = \frac{\mu}{\lambda}(\mathsf{c} - a^2), \\ \gamma = \frac{\nu}{\lambda}(\mathsf{b} - a^2), & \gamma' = \frac{\nu}{\mu}(\mathsf{a} - b^2) \end{cases}$$

ou

$$(25)\quad \begin{cases} \alpha = \frac{\lambda}{\mu}(\mathsf{b} - c^2), & \alpha' = \frac{\lambda}{\nu}(\mathsf{c} - b^2), \\ \beta = \frac{\mu}{\nu}(\mathsf{c} - a^2), & \beta' = \frac{\mu}{\lambda}(\mathsf{a} - c^2), \\ \gamma = \frac{\nu}{\lambda}(\mathsf{a} - b^2), & \gamma' = \frac{\nu}{\mu}(\mathsf{b} - a^2). \end{cases}$$

On arrive ainsi à deux solutions B, que nous appellerons les *solutions* B_1 et B_2, et qui, comme les solutions A_1 et A_2, comportent chacune cinq constantes arbitraires.

Solution B_1.

$$(26)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathsf{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{\lambda}(\mathsf{b} - a^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\mu}{\lambda}(\mathsf{c} - a^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mathsf{b}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{\lambda}{\mu}(\mathsf{c} - b^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} + \frac{\nu}{\mu}(\mathsf{a} - b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mathsf{c}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\mu}{\nu}(\mathsf{a} - c^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + \frac{\lambda}{\nu}(\mathsf{b} - c^2)\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}. \end{cases}$$

Solution B_2.

$$(27)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathsf{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{\lambda}(\mathsf{a} - b^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\mu}{\lambda}(\mathsf{a} - c^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mathsf{b}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \frac{\lambda}{\mu}(\mathsf{b} - c^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} + \frac{\nu}{\mu}(\mathsf{b} - a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mathsf{c}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\mu}{\nu}(\mathsf{c} - a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + \frac{\lambda}{\nu}(\mathsf{c} - b^2)\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}. \end{cases}$$

La troisième onde a, comme dans la solution précédente, la vitesse

$$\omega^2 = \mathrm{a}l^2 + \mathrm{b}m^2 + \mathrm{c}n^2;$$

mais ici les deux solutions restent distinctes, même si l'on suppose la vitesse de la troisième onde nulle.

Solution C.

(Elle comprend $2 \times \varkappa^2$ manières d'arriver à la surface de l'onde.)

11. La solution C laisse indéterminées les constantes f', g', h' et détermine, par les formules (9), les six constantes

$$(28)\qquad \begin{cases} \mathrm{a} = \mathrm{f} = b^2, \\ \mathrm{b} = \mathrm{g} = c^2, \\ \mathrm{c} = \mathrm{h} = a^2. \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs dans les expressions (17), on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= b^2 l^2 + a^2 m^2 + \mathrm{g}' n^2, \\ \mathrm{B} &= \mathrm{h}' l^2 + c^2 m^2 + b^2 n^2, \\ \mathrm{C} &= c^2 l^2 + \mathrm{f}' m^2 + a^2 n^2. \end{aligned}$$

D'ailleurs, en vertu de (10),

$$\omega^2 = \mathrm{h}' l^2 + \mathrm{f}' m^2 + \mathrm{g}' n^2.$$

Portant ces valeurs dans (11), on reconnaît que le second membre devient identiquement nul, pourvu que

$$(29)\qquad \begin{cases} \alpha\alpha' = (\mathrm{f}' - a^2)(\mathrm{g}' - a^2), \\ \beta\beta' = (\mathrm{g}' - b^2)(\mathrm{h} - b^2), \\ \gamma\gamma' = (\mathrm{h}' - c^2)(\mathrm{f}' - c^2). \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs dans le second membre de (12), on recon-

naît que les termes en l^4, m^4, n^4 sont nuls. Celui en $l^4 m^2$ se réduit à

$$(c^2 - b^2)(\mathbf{f}' - c^2)(\mathbf{h}' - c^2),$$

qui ne peut être nul que pour $\mathbf{f}' = c^2$ ou $\mathbf{h}' = c^2$. La première de ces valeurs entraîne, par symétrie, $\mathbf{g}' = a^2$, $\mathbf{f}' = b^2$; mais ces valeurs de $\mathbf{f}'$, $\mathbf{g}'$, $\mathbf{h}'$, jointes à celles (28) de $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$, montrent que la solution ainsi obtenue rentrerait, comme cas particulier, dans celle B.

Reste, pour satisfaire à l'équation ci-dessus, la première des équations suivantes, les autres en étant déduites par symétrie,

$$(30) \qquad \mathbf{h}' = c^2, \qquad \mathbf{f}' = a^2, \qquad \mathbf{g}' = b^2.$$

Par suite, les équations (29) deviennent

$$(31) \qquad \alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma' = 0.$$

Moyennant les valeurs (30) et (31), tous les termes du second membre de (12) disparaissent, sauf celui en $l^2 m^2 n^2$, et l'on trouve définitivement que cette équation est aussi satisfaite, pourvu que

$$(32) \qquad \alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma' = (a^2 - c^2)(b^2 - a^2)(c^2 - b^2).$$

Les équations (31) et (32) donnent, en désignant toujours par λ, μ, ν trois constantes arbitraires, l'une des deux solutions suivantes :

$$(33) \qquad \begin{cases} \alpha = \beta = \gamma = 0, \\ \alpha' = \frac{\mu}{\nu}(a^2 - c^2), \\ \beta' = \frac{\nu}{\lambda}(b^2 - a^2), \\ \gamma' = \frac{\lambda}{\mu}(c^2 - b^2), \end{cases}$$

ou

$$(33\ bis) \qquad \begin{cases} \alpha' = \beta' = \gamma' = 0, \\ \alpha = \frac{\lambda}{\mu}(b^2 - a^2), \\ \beta = \frac{\mu}{\nu}(c^2 - b^2), \\ \gamma = \frac{\mu}{\lambda}(a^2 - c^2). \end{cases}$$

Avec les valeurs (28), (30), (33), (33 *bis*), la solution C, se dédoublant comme les précédentes, fournit, pour les équations différentielles (6), les deux systèmes suivants :

Solution C_1.

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\lambda}(b^2-a^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b^2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\lambda}{\mu}(c^2-b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\mu}{\nu}(a^2-c^2)\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}.
\end{aligned}\right.$$

Solution C_2.

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\mu}{\lambda}(a^2-c^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b^2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\mu}(b^2-a^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z},\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\lambda}{\nu}(c^2-b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x},
\end{aligned}\right.$$

qui, au lieu de renfermer chacune cinq constantes arbitraires, comme les solutions A_1, A_2, B_1, B_2, n'en renferment que deux, à savoir les rapports $\lambda : \mu : \nu$.

La vitesse de la troisième onde devient, à cause de (30),

$$(36)\qquad \omega^2 = c^2 l^2 + a^2 m^2 + b^2 n^2.$$

Solution D.

(Elle comprend $2 \times \infty^2$ manières d'arriver à la surface de l'onde.)

12. Si l'on opère exactement de la même manière sur les valeurs (9) relatives à la solution D, on trouve de même deux solutions à deux constantes arbitraires, à savoir :

Solution D_1.

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\nu}{\lambda}(a^2-b^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + b^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{\mu}(b^2-c^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + c^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\nu}(c^2-a^2)\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}.
\end{aligned}\right.$$

Solution D_2.

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\mu}{\lambda}(c^2-a^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y},\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+b^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\nu}{\mu}(a^2-b^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z},\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+c^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\lambda}{\nu}(b^2-c^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients $\mathbf{f}'$, $\mathbf{g}'$, $\mathbf{h}'$ qui entrent dans l'équation de la vitesse de la troisième onde prennent des valeurs déterminées, en sorte que le carré de cette vitesse est

$$\omega^2 = b^2 l^2 + c^2 m^2 + a^2 n^2.$$

Solutions E *et* F.

(Elles ne donnent rien de nouveau.)

13. Les valeurs trouvées par $\mathbf{f}'$, $\mathbf{g}'$, $\mathbf{h}'$ dans les solutions C et D sont respectivement celles que donnent les équations (9) pour les solutions F et E. Il en résulte que celles-ci fourniraient pour $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ les mêmes valeurs que celles-là et conduiraient, par suite, aux mêmes équations différentielles. Ainsi les solutions E et F coïncident nécessairement avec celles C et D.

Exclusion des solutions C_1, C_2; D_1, D_2.

14. Les solutions C_1, C_2; D_1, D_2 elles-mêmes sont physiquement inadmissibles. En effet, dans la première des équations différentielles, (34) par exemple (*solution* C), il n'y a pas de raison pour que le terme en $\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$ manque plutôt que celui $\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}$; ils devraient manquer l'un et l'autre ou y être tous deux.

De même, il n'est pas admissible que, dans cette équation, le coefficient de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ne soit pas une fonction symétrique des deux quantités b^2 et c^2.

L'expression

$$\omega^2 = c^2 l^2 + a^2 m^2 + b^2 n^2$$

de la vitesse de la troisième onde est également inadmissible, comme dissymétriquement constituée.

On conçoit que les coefficients qui expriment cette vitesse restent arbitraires comme dans les solutions A_1, A_2; B_1, B_2; mais, s'ils sont déterminés en fonction de a^2, b^2, c^2, il faut que celui de l^2 soit symétrique en b^2 et c^2; celui de m^2 en c^2, a^2; celui de n^2 en a^2, b^2. C'est ce qui n'a pas lieu.

Les mêmes motifs de rejet existent à l'égard des solutions C_2, D_1 et D_2.

Solutions définitives.

15. Il ne reste, en définitive, comme physiquement admissibles, que les quatre solutions A_1, A_2; B_1, B_2 fournissant ensemble $4 \times \infty^5$ manières différentes d'obtenir la surface de l'onde, puisque chacune d'elles comporte les cinq constantes arbitraires a, b, c; λ, μ, ν.

Les vitesses des trois ondes ont les mêmes valeurs dans toutes ces solutions. Cela est évident pour les deux ondes de Fresnel, puisque les équations ont été établies par cette condition; mais la troisième onde se trouve avoir aussi, dans toutes ces solutions, l'expression

$$\omega^2 = \mathsf{a} l^2 + \mathsf{b} m^2 + \mathsf{c} n^2. \tag{39}$$

Deux quelconques des $4 \times \infty^5$ solutions peuvent donc différer :

1° Soit par les valeurs de a, b, c, c'est-à-dire par la vitesse de propagation de l'onde invisible;

2° Par les rapports $\lambda : \mu : \nu$, c'est-à-dire par la direction du vecteur lumineux (vibration lumineuse dans la théorie ordinaire), c'est-à-dire par des choses sur lesquelles l'observation n'a eu jusqu'ici aucune prise.

La surface de l'onde obscure, c'est-à-dire l'enveloppe du plan

$$lx + my + nz = \omega, \tag{40}$$

où ω est donné par l'équation (29) et où

$$(41)\qquad \begin{aligned} l^2 + m^2 + n^2 &= 1, \\ \omega^2 &= \mathrm{a}l^2 + \mathrm{b}m^2 + \mathrm{c}n^2, \end{aligned}$$

est, comme il est aisé de le reconnaître, la surface du second degré

$$(42)\qquad \frac{x^2}{\mathrm{a}} + \frac{y^2}{\mathrm{b}} + \frac{z^2}{\mathrm{c}} = 1 :$$

1° Si l'on prend les trois constantes a, b, c positives, la surface de l'onde obscure est un ellipsoïde, et les vibrations obscures pourront se propager dans toutes les directions.

2° Si une ou deux de ces constantes sont négatives, la surface de l'onde est un hyperboloïde à une ou deux nappes, et les vibrations obscures ne pourront se propager que dans les directions situées à l'extérieur ou à l'intérieur du cône asymptote.

3° Si a, b, c sont négatifs, la surface sera imaginaire et les vibrations obscures ne pourront se propager dans aucune direction. Il en est de même en particulier si a, b, c sont supposés nuls.

On appelle, comme on sait, rayon répondant à une onde plane la droite qui va du centre de la surface de l'onde au point de contact avec l'onde plane. Ici, on vérifie facilement que les équations du rayon relatif à l'onde obscure sont

$$(43)\qquad \frac{x}{l\mathrm{a}} = \frac{y}{m\mathrm{b}} = \frac{z}{n\mathrm{c}} = \omega.$$

Onde lumineuse. Rappel de quelques formules.

16. Pour avoir la surface de l'onde lumineuse, il faut prendre l'enveloppe du plan (40) en supposant que ω satisfasse à l'équation (7) de Fresnel $\delta = 0$, c'est-à-dire

$$(44)\qquad \frac{l^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{m^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{n^2}{\omega^2 - c^2} = 0.$$

On retrouvera ainsi, par des méthodes données dans tous les

Traités, la surface de Fresnel

$$(45)\qquad \frac{x^2}{r^2-a^2}+\frac{y^2}{r^2-b^2}+\frac{z^2}{r^2-c^2}=1,$$

où

$$(46)\qquad r^2=x^2+y^2+z^2.$$

Les équations bien connues du rayon lumineux, répondant à une onde dont la vitesse de propagation est ω, sont

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= l\omega-\psi\frac{l}{a^2-\omega^2},\\ y &= m\omega-\psi\frac{m}{b^2-\omega^2},\\ z &= n\omega-\psi\frac{n}{c^2-\omega^2},\end{aligned}\right.$$

où

$$(47\ bis)\qquad \psi=\omega(\omega^2-r^2).$$

A chacune des deux racines de l'équation (44) répond ainsi un rayon.

Les cosinus de direction de la projection du rayon lumineux sur le plan de l'onde sont proportionnels aux trois quantités

$$(47\ ter)\qquad \frac{l}{a^2-\omega^2},\quad \frac{m}{b^2-\omega^2},\quad \frac{n}{c^2-\omega^2}.$$

Les cosinus de direction d'une droite perpendiculaire au rayon et située dans le plan de l'onde sont proportionnels à

$$(48)\qquad \frac{c^2-b^2}{\dfrac{l}{\omega^2-a^2}},\quad \frac{a^2-c^2}{\dfrac{m}{\omega^2-b^2}},\quad \frac{b^2-a^2}{\dfrac{n}{\omega^2-c^2}}.$$

La normale au plan de l'onde et les deux directions définies par (47 *ter*) et (48) forment un système d'axes rectangulaires, comme on le vérifie aisément.

Nous ajouterons la formule suivante :

$$(48\ bis)\qquad \frac{l^2}{(a^2-\omega^2)^2}+\frac{m^2}{(b^2-\omega^2)^2}+\frac{n^2}{(c^2-\omega^2)^2}=\frac{1}{\omega^2(r^2-\omega^2)}.$$

Plans de polarisation (de Fresnel). Plan de polarisation radial. Plan normal.

17. On sait que Fresnel appelle *plan de polarisation* le plan mené par la normale à l'onde perpendiculairement à celui qui projette le rayon lumineux sur le plan de l'onde.

C'est donc le plan mené par la normale à l'onde et la direction (48).

Nous appellerons ce plan le plan de polarisation *de Fresnel* ou simplement le *plan de polarisation*, et nous appellerons *plan de polarisation radial* le plan mené par le rayon lumineux perpendiculairement à celui qui projette ce rayon sur le plan de l'onde, c'est-à-dire le plan défini par les directions (47) et (48).

Les cosinus de direction de la normale à ce plan sont proportionnels à

$$(48\ ter)\qquad \frac{a^2 l}{\omega^2-a^2},\quad \frac{b^2 m}{\omega^2-b^2},\quad \frac{c^2 n}{\omega^2-c^2},$$

comme on le vérifie aisément à l'aide des expressions précédentes et de l'équation aux vitesses des ondes (44).

Nous appellerons *plan normal* (plan de *normalisation* de M. Cornu) le plan perpendiculaire aux deux plans de polarisation, c'est-à-dire le plan déterminé par le rayon lumineux et la normale à l'onde.

Nous rappellerons que :

1° Selon Fresnel, la vibration lumineuse est perpendiculaire à son plan de polarisation. Elle coïncide donc avec la projection (47 *ter*) du rayon lumineux sur le plan de l'onde.

2° Selon Mac Cullagh, Newmann, Lamé (Cauchy dans partie de ses Mémoires), M. Massieu et généralement dans toutes les théories où l'on regarde l'éther comme un milieu élastique homogène et hétérotrope, la vibration est dans le plan de l'onde, mais à angle droit sur celle de Fresnel, c'est-à-dire suivant la direction (48), intersection des deux plans de polarisation.

3° Selon Maxwell (Théorie électromagnétique) et selon M. Sarran qui fait la théorie élastique en supposant l'éther isotrope, mais périodiquement hétérogène, la vibration est perpendiculaire au plan de polarisation radial, au lieu de l'être au plan de polarisation de Fresnel, c'est-à-dire qu'elle a la direction (48 *ter*).

Cette direction est, en général, très voisine de celle de Fresnel, les trois indices de réfraction des cristaux étant, en général, peu différents.

M. Boussinesq arrive approximativement au même résultat en regardant l'éther comme homogène et isotrope, la matière pondérable étant censée participer au mouvement qui détermine la lumière.

Vecteur principal; vecteurs dérivés.

18. On obtient, comme nous l'avons dit en commençant, des grandeurs u, v, w proportionnelles aux cosinus de direction du vecteur répondant à une onde plane qui se propage avec une vitesse ω, dans la direction définie par les cosinus l, m, n, en remplaçant dans les équations différentielles les symboles

$$(a)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2},\quad \dfrac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \dfrac{\partial^2}{\partial z^2},\quad \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \\ \text{respectivement par} \\ \quad l^2,\quad m^2,\quad n^2,\quad \omega^2. \end{array}\right.$$

D'ailleurs, si, dans les équations différentielles (18) et (19) du n° **7** et celles (26) et (27) du n° **9**, répondant respectivement aux quatre solutions A_1, A_2, B_1, B_2, on pose

$$(49)\qquad u = \frac{1}{\lambda}\,U,\qquad v = \frac{1}{\mu}\,V,\qquad w = \frac{1}{\nu}\,W,$$

les coefficients λ, μ, ν disparaîtront.

Nous appelons le vecteur auxiliaire, dont les projections sur les axes de coordonnées sont U, V, W, le *vecteur principal*, et ceux dont les projections sont u, v, w pour diverses valeurs des constantes arbitraires λ, μ, ν, *les vecteurs dérivés* du vecteur principal.

Il suffit d'ailleurs d'étudier, pour chaque onde, la direction du vecteur principal; car, à chaque direction de ce vecteur répond, pour tout système de valeurs des constantes λ, μ, ν, une direction correspondante de vecteur dérivée. Si l'on considère la surface du second degré

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = \text{const.},$$

il suffit, par le centre de cette surface, de mener une parallèle au vecteur principal jusqu'à son intersection avec cette surface, et le vecteur dérivé sera normal à la surface au point ainsi obtenu.

Ceci posé, remplaçons dans les équations différentielles U, V, W par les expressions (49).

En posant, pour simplifier,

$$(50)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial W}{\partial z} = \Theta, \\[2ex] \mathsf{a}\dfrac{\partial U}{\partial x} + \mathsf{b}\dfrac{\partial V}{\partial y} + \mathsf{c}\dfrac{\partial W}{\partial z} = \Psi, \end{cases}$$

on aura, pour les équations différentielles relatives au vecteur principal :

Solution A_1.

$$(51)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} + c^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x}\right) - b^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial z}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} + a^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial y}\right) - c^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} + b^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial z}\right) - a^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Solution A_2.

$$(52)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \mathsf{a}\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + c^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x}\right) - b^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial W}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial z}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \mathsf{b}\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + a^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial U}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial y}\right) - c^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \mathsf{c}\dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + b^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial z}\right) - a^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Solution B_1.

$$(53)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} + a^2\left(\Delta_2 U - \dfrac{\partial \theta}{\partial x}\right), \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} + b^2\left(\Delta_2 V - \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\right), \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} + c^2\left(\Delta_2 W - \dfrac{\partial \theta}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Solution B_2.

$$(54)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \mathrm{a}\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + a^2\Delta_2 U - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a^2\dfrac{\partial U}{\partial x} + b^2\dfrac{\partial V}{\partial y} + c^2\dfrac{\partial W}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \mathrm{b}\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + b^2\Delta_2 V - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(a^2\dfrac{\partial U}{\partial x} + b^2\dfrac{\partial V}{\partial y} + c^2\dfrac{\partial W}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \mathrm{c}\dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + c^2\Delta_2 W - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(a^2\dfrac{\partial U}{\partial x} + b^2\dfrac{\partial W}{\partial y} + c^2\dfrac{\partial W}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Et, si l'on fait les substitutions (a) du § **18** pour obtenir la direction du vecteur lumineux, il viendra d'abord

$$(55)\quad \begin{cases} \Theta = lU + mV + nW, \\ \Psi = \mathrm{a}lU + \mathrm{b}mV + \mathrm{c}nW; \end{cases}$$

puis, en posant encore

$$(56)\quad P = nV - mW, \qquad Q = lW - nU, \qquad R = mU - lV;$$

Solution A_1.

$$(57)\quad \begin{cases} \omega^2 U = lP + c^2 mR - b^2 nQ, \\ \omega^2 V = mP - a^2 nP - c^2 lR, \\ \omega^2 W = nP + b^2 lQ - a^2 m. \end{cases}$$

Solution A_2.

$$(58)\quad \begin{cases} \omega^2 U = \mathrm{a}l\Theta + c^2 mR - b^2 nQ, \\ \omega^2 V = b^2 m\Theta + a^2 nP - c^2 lR, \\ \omega^2 W = \mathrm{c}n\Theta + b^2 lQ - a^2 mP. \end{cases}$$

Solution B_1.

$$(59)\quad \begin{cases} (\omega^2 - a^2)\,U = l\,(\Psi - a^2\Theta), \\ (\omega^2 - b^2)\,V = m(\Psi - b^2\Theta), \\ (\omega^2 - c^2)\,W = n\,(\Psi - c^2\Theta). \end{cases}$$

Solution B_2.

$$(60)\quad \begin{cases} (\omega^2 - a^2)\,U = l\,[\mathrm{a}\Theta - (a^2 lU + b^2 mV + c^2 W)], \\ (\omega^2 - b^2)\,V = m[\mathrm{b}\Theta - (a^2 lU + b^2 mV + c^2 W)], \\ (\omega^2 - c^2)\,W = n\,[\mathrm{c}\Theta - (a^2 lU + b^2 mV + c^2 W)]. \end{cases}$$

Nous allons à présent rechercher les directions possibles du vecteur dans chaque solution, en commençant par cette dernière.

Remarque. — Pour les ondes parallèles aux plans, deux des trois composantes U, V, W sont toujours nulles, c'est-à-dire que le vecteur principal est toujours dans le plan de l'onde. Il en résulte que, pour ces trois espèces d'onde, tous les vecteurs dérivés coïncident avec le vecteur principal.

Solution B_2.

(Elle comprend les équations de Fresnel et celle de Maxwell-Sarrau comme cas particuliers.)

19. Si l'on ajoute les équations (60) multipliées par l, m, n, il vient

$$\Theta(\omega^2 - \mathrm{a}l^2 - \mathrm{b}m^2 - \mathrm{c}n^2) = 0.$$

Nous retrouvons ainsi l'expression

$$\omega^2 = \mathrm{a}l^2 + \mathrm{b}m^2 + \mathrm{c}n^2$$

de la vitesse de l'onde obscure.

Laissant de côté cette onde, on satisfait encore à l'équation ci-dessus par

$$\Theta = lU + mV + nW = 0,$$

qui prouve que le vecteur principal est dans le plan de l'onde.

Faisant donc $\Theta = 0$ dans les équations (60), on en tire

$$(61)\quad \frac{U}{\dfrac{l}{\omega^2 - a^2}} = \frac{V}{\dfrac{m}{\omega^2 - b^2}} = \frac{W}{\dfrac{n}{\omega^2 - c^2}} = -(a^2 l U + b^2 m V + c^2 n W),$$

et de là on conclut

$$\frac{a^2 l^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{b^2 m^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{c^2 n^2}{\omega^2 - c^2} = -1$$

ou

$$\frac{l^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{m^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{n^2}{\omega^2 - c^2} = 0,$$

ce qui vérifie que nous reproduisons comme cela doit être l'équation de la vitesse des ondes.

D'ailleurs, les équations (61) montrent que le vecteur principal est la projection du rayon lumineux sur le plan de l'onde, ce qui est conforme à l'hypothèse de Fresnel.

Si l'on supprime l'onde obscure, le système reproduit donc complètement les résultats de la théorie de Fresnel. Ainsi les équations différentielles reproduisant exactement les résultats de Fresnel sont celles (27) du § 9, particularisées ainsi :

$$\mathsf{a} = \mathsf{b} = \mathsf{c} = 0, \qquad \lambda = \mu = \nu.$$

Mais les équations (27) renferment une quintuple infinité d'autres solutions pour lesquelles le vecteur n'est ni dans le plan de l'onde, ni dans le plan de polarisation, ni dans un plan perpendiculaire. Les cosinus de direction sont proportionnels à

$$\frac{1}{\lambda}\,\frac{l}{\omega^2 - a^2}, \quad \frac{1}{\mu}\,\frac{m}{\omega^2 - b^2}, \quad \frac{1}{\nu}\,\frac{n}{\omega^2 - c^2},$$

λ, μ, ν étant des constantes arbitraires.

PROBLÈME.

20. Parmi les directions en nombre illimité du vecteur que donne chacune de nos solutions, il en est qui méritent un examen particulier.

En effet, le phénomène lumineux est symétrique par rapport au plan que (**17**) nous avons appelé *normal*, c'est-à-dire celui qui contient à la fois la normale au plan de l'onde et le rayon lumineux. Il n'y a donc pas de raison pour que le vecteur, quelle qu'en soit la nature, cause de ce phénomène, soit, relativement à ce plan, dans une position plutôt que dans la position symétrique. Il doit, par suite, être ou normal à ce plan ou dans ce plan. La première direction est unique : c'est celle (**17**) de Newmann, Mac Cullagh, Cauchy, Lamé; celle qu'on obtient en regardant l'éther contenu dans un cristal comme élastique, homogène et hétérotrope.

La seconde peut être quelconque dans le plan normal. Il n'y a pas de raison, en effet, pour qu'elle soit (**17**) normale au plan de polarisation, suivant les hypothèses de Fresnel, plutôt qu'au plan de polarisation radial, suivant les hypothèses de M. Sarrau et celles résultant de la théorie électromagnétique de Maxwell, ou pour qu'elle occupe une autre position quelconque, cette position étant une fonction des directions de la normale au plan de l'onde et du rayon. Cette fonction, *a priori* inconnue, nos équations doivent nécessairement en donner l'expression la plus générale. Les constantes arbitraires qui peuvent y entrer n'ont à satisfaire qu'à une seule condition : c'est que, dans les milieux isotropes où le rayon lumineux et la normale au plan de l'onde coïncident, le vecteur doit être perpendiculaire à leur direction commune.

Ainsi, pour chacune de nos solutions, il y a intérêt à poser ce problème : peut-elle fournir un vecteur ou perpendiculaire au plan normal ou situé dans ce plan?

Il est facile de voir que la solution B_2 ne peut pas, pour une onde quelconque, fournir de vecteur de la première de ces deux espèces; car le vecteur principal qu'elle donne est toujours (**19**) dans le plan normal. Or, pour les ondes parallèles aux plans principaux, les vecteurs dérivés coïncident suivant la remarque de la fin du § **18** avec le vecteur principal, quelles que soient les constantes λ, μ, ν. On ne peut donc pas disposer de ces constantes de façon à obtenir la direction du vecteur dont il s'agit pour des ondes parallèles aux plans coordonnés.

La solution B_2 fournit, au contraire, au moins un vecteur situé dans le plan normal, à savoir son vecteur principal. Il s'agit de savoir si elle en peut fournir d'autres.

Pour qu'un vecteur ayant pour composantes u, v, w soit dans un même plan avec la normale à l'onde dont les cosinus directeurs sont

$$l, \quad m, \quad n,$$

et la projection du rayon lumineux sur le plan de l'onde dont les cosinus directeurs sont (**17**) proportionnels à

$$\frac{l}{\omega^2 - a^2}, \quad \frac{m}{\omega^2 - b^2}, \quad \frac{n}{\omega^2 - c^2},$$

il faut et il suffit que le déterminant

$$\begin{matrix} u & v & w \\ l & m & n \\ \dfrac{l}{\omega^2 - a^2} & \dfrac{m}{\omega^2 - b^2} & \dfrac{n}{\omega^2 - c^2} \end{matrix}$$

soit nul, ou que

$$(61\ bis) \qquad \frac{u(b^2 - c^2)}{\dfrac{l}{\omega^2 - a^2}} + \frac{v(c^2 - a^2)}{\dfrac{m}{\omega^2 - b^2}} + \frac{w(a^2 - b^2)}{\dfrac{n}{\omega^2 - c^2}} = 0,$$

ou comme

$$u = \frac{U}{\lambda}, \qquad v = \frac{V}{\mu}, \qquad w = \frac{W}{\nu},$$

$$\frac{(b^2 - c^2)U}{\lambda \dfrac{l}{\omega^2 - a^2}} + \frac{(c^2 - a^2)V}{\mu \dfrac{m}{\omega^2 - b^2}} + \frac{(a^2 - b^2)W}{\nu \dfrac{n}{\omega^2 - c^2}} = 0,$$

ou simplement, à cause de (61),

$$(62) \qquad \frac{b^2 - c^2}{\lambda} + \frac{c^2 - a^2}{\mu} + \frac{a^2 - b^2}{\nu} = 0.$$

Ainsi, nous arrivons à cette proposition remarquable qu'*il existe une infinité de solutions autres que celles de Fresnel, pour lesquelles le vecteur (vibration ou autre) est dans un plan perpendiculaire au plan de polarisation.*

En désignant par h et k deux constantes arbitraires dont le rapport

seul interviendra, on tire de l'équation (62)

$$\frac{1}{\lambda} = h + ka^2,$$

$$\frac{1}{\mu} = h + kb^2,$$

$$\frac{1}{\nu} = h + kc^2,$$

et, par suite, les équations différentielles les plus générales fournies par la solution B_2, et satisfaisant à la condition de donner un vecteur situé dans le plan normal, sont

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \Delta_2 u + (h + ka^2)\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{a}\Theta - \Theta'), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b^2 \Delta_2 v + (h + kb^2)\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{b}\,\Theta - \Theta'), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c^2 \Delta_2 w + (h + kc^2)\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{c}\,\Theta - \Theta'). \end{aligned}\right.$$

En posant

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} \Theta' &= \frac{1}{h + ka^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{h + kb^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{h + kc^2}\frac{\partial w}{\partial z}, \\ \Theta' &= \frac{a^2}{h + ka^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b^2}{h + kb^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{c^2}{h + kc^2}\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

La direction du vecteur est donnée, à l'aide des équations (60), par

$$(65)\quad \frac{u}{(h + ka^2)\dfrac{l}{a^2 - \omega^2}} = \frac{v}{(h + kb^2)\dfrac{m}{b^2 - \omega^2}} = \frac{w}{(h + kc^2)\dfrac{n}{c^2 - \omega^2}}$$

Le cosinus de l'angle qu'elle fait avec la normale au plan de l'onde, ou le sinus de son inclinaison sur ce plan, a pour expression

$$\frac{1}{\mathrm{R}}\left[(h + ka^2)\frac{l^2}{a^2 - \omega^2} + (h + kb^2)\frac{m^2}{b^2 - \omega^2} + (h + kc^2)\frac{n^2}{c^2 - \omega^2}\right],$$

en posant, pour abréger,

$$R = \sqrt{(h + ka^2)^2 \frac{l^2}{(a^2 - \omega^2)^2} + (h + kb^2)^2 \frac{m^2}{(b^2 - \omega^2)^2} + (h + kc^2)^2 \frac{n^2}{(c^2 - \omega^2)^2}}.$$

En écrivant partout

$$h + k\omega^2 - k\omega^2$$

au lieu de h, ayant égard à l'équation aux vitesses des ondes

$$\frac{l^2}{a^2 - \omega^2} + \frac{m^2}{b^2 - \omega^2} + \frac{n^2}{c^2 - \omega^2} = 0$$

et à la formule (48 *bis*),

$$\frac{l^2}{(a^2 - \omega^2)^2} + \frac{m^2}{(b^2 - \omega^2)^2} + \frac{n^2}{(c^2 - \omega^2)^2} = \frac{1}{\omega^2(r^2 - \omega^2)},$$

r étant le rayon vecteur de la surface de l'onde de Fresnel coïncidant avec le rayon lumineux, on a

$$R = \sqrt{\frac{h^2 + 2hk\omega^2 - k^2 r^2 \omega^2}{\omega^2(r^2 - \omega^2)}},$$

et pour le sinus de l'inclinaison du vecteur sur le plan de l'onde,

$$(65\ bis) \qquad \frac{k}{R} = \frac{k\omega\sqrt{r^2 - \omega^2}}{\sqrt{h^2 + 2hk\omega^2 + k^2 r^2 \omega^2}}.$$

Dans le cas des milieux isotropes, on a

$$\omega^2 = r^2,$$

qui montre que, alors, la vibration est transversale, quel que soit le rapport $k:h$. Donc la solution obtenue satisfait à toutes les conditions de symétrie qu'il est permis de poser *a priori*, en sorte que rien, *a priori*, n'empêche de donner au rapport $\frac{h}{k}$ une valeur absolument arbitraire.

Discussion du problème précédent.

(La solution B_2 comprend aussi les équations Maxwell-Sarrau.)

21. Pour $\frac{h}{k} = \infty$ ou $k = 0$, la vibration est dans le plan de l'onde : on retrouve la direction de Fresnel.

Au contraire, pour $\frac{h}{k} = 0$, le cosinus de l'inclinaison du vecteur sur la normale à l'onde est

$$\frac{1}{r}\sqrt{r^2 - \omega^2}.$$

Mais, si l'on abaisse du centre de la surface de l'onde une perpendiculaire sur un plan tangent parallèle au plan de l'onde et que l'on considère le triangle rectangle ayant pour sommets les extrémités de cette perpendiculaire et le point de contact, le rayon r de la surface de l'onde sera l'hypoténuse de ce triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit sont ω et $\sqrt{r^2 - \omega^2}$, ce qui montre que, dans ce cas, le vecteur est normal au plan de la polarisation radial.

C'est la direction qu'ont trouvée, par des voies absolument différentes, Maxwell et M. Sarrau.

On obtiendra les équations Maxwell-Sarrau en faisant, dans (63) et (64),

$$h = 1, \qquad k = -1, \qquad \mathsf{a} = \mathsf{b} = \mathsf{c} = 0.$$

Mais nos équations donnent encore le même vecteur lumineux en y laissant a, b, c arbitraires, pourvu qu'on fasse $h = 0$, $k = 1$. Il y a donc ∞^3 solutions donnant une vibration lumineuse normale au plan de polarisation radial.

Leurs équations sont

$$(66)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2\left[\Delta_2 u - \frac{\partial}{\partial x}(\mathsf{a}\Theta - \Theta')\right],\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b^2\left[\Delta_2 v - \frac{\partial}{\partial y}(\mathsf{b}\Theta - \Theta')\right],\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= c^2\left[\Delta_2 w - \frac{\partial}{\partial z}(\mathsf{c}\Theta - \Theta')\right],\end{aligned}\right.$$

où

$$(67)\quad \begin{cases} \Theta = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{b^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial w}{\partial z}, \\ \Theta' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Celles de Maxwell-Sarrau sont

$$(68)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\Delta_2 u - \Theta'), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = b^2(\Delta_2 v - \Theta'), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2(\Delta_2 w - \Theta'). \end{cases}$$

Suite de la discussion.

(Possibilité de vibrations lumineuses longitudinales.)

22. Si le rapport $\frac{h}{k}$ varie de $+\infty$ à 0, le vecteur varie depuis la direction normale au plan de polarisation de Fresnel (**17**) jusqu'à celle de la normale au plan de polarisation radial. Dans la plupart des cristaux, cette variation est très faible, le rayon lumineux restant toujours très voisin de la normale au plan de l'onde.

La vitesse, tant que $\frac{h}{k}$ est positif, reste donc toujours quasi transversale au rayon lumineux.

Mais, si $\frac{h}{k}$ est négatif et qu'on pose

$$\frac{h}{k} = -\omega_0^2,$$

l'expression (65 *bis*) du sinus de l'inclinaison du vecteur sur le plan de l'onde devient

$$(65\ ter)\quad \frac{\omega\sqrt{r^2-\omega^2}}{\sqrt{\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + r^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\omega^2-\omega_0^2)^2}{\omega^2(r^2-\omega^2)}}}.$$

Donc, si l'on suppose au rapport arbitraire $\frac{h}{k}$ une valeur négative comparable au carré de la vitesse de la lumière, le sinus dont il s'agit peut devenir égal à l'unité pour l'onde particulière qui se propagerait avec la vitesse ω_0, et serait très voisin de l'unité pour d'autres ondes. Ainsi :

Il est possible de satisfaire à toutes les lois générales de la propagation de la lumière par des vibrations longitudinales pour une onde, et quasi longitudinales pour certaines ondes (¹).

Solution B_1.

(Elle contient aussi les équations Maxwell-Sarrau comme cas particulier.)

25. Les équations (53) donnent, pour les composantes U, V, W du vecteur principal, les expressions

$$(69)\qquad \left\{\begin{aligned} (\omega^2 - a^2)\,U &= l\,(\Psi - a^2\Theta),\\ (\omega^2 - b^2)\,V &= m(\Psi - b^2\Theta),\\ (\omega^2 - c^2)\,W &= n\,(\Psi - c^2\Theta),\end{aligned}\right.$$

où Θ et Ψ ont les valeurs (55).

On tire de là, à cause de

$$lU + mV + mW = \Theta,$$

$$\Theta = \Psi\left(\frac{l^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{m^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{n^2}{\omega^2 - c^2}\right) - \Theta\left(\frac{a^2 l^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{b^2 m^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{c^2 n^2}{\omega^2 - c^2}\right),$$

(¹) Nous ne prétendons pas, bien entendu, qu'une telle direction soit dans les probabilités; mais, jusqu'à plus ample informé à fournir par l'expérience, elle ne peut pas être réputée impossible.

ou, en multipliant le premier membre par $l^2 + m^2 + n^2$,

$$(\Theta\omega^2 - \Psi)\left(\frac{l^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{m^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{n^2}{\omega^2 - c^2}\right),$$

qui se décompose en

$$\frac{l^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{m^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{n^2}{\omega^2 - c^2} = 0,$$

$$\omega^2 = \frac{\Psi}{\Theta}.$$

La première est bien l'équation de Fresnel, qui se trouve ainsi vérifiée.

La seconde se rapporte à l'onde obscure.

Si l'on porte la valeur de ω^2 qu'elle fournit dans les équations (66), celles-ci se réduisent à

$$\frac{U}{l} = \frac{V}{m} = \frac{W}{n},$$

qui prouvent que le vecteur, se rapportant à l'onde obscure, est ici normal à cette onde.

Ces valeurs de U, V, W donnent d'ailleurs

$$\omega^2 = \frac{\Psi}{\Theta} = \mathsf{a}l^2 + \mathsf{b}m^2 + \mathsf{c}n^2,$$

qui est bien la valeur précédemment trouvée pour la vitesse de l'onde obscure.

Théorème. — *Le vecteur principal relatif à la solution* B_1 *est toujours dans le plan qui projette le rayon lumineux sur le plan de l'onde. Si la vitesse de l'onde obscure est nulle, elle est perpendiculaire au rayon lumineux et fournit à nouveau les équations Maxwell-Sarrau.*

Ce dernier point est évident; car, si l'on fait $\mathsf{a} = \mathsf{b} = \mathsf{c} = 0$, les équations (53) reviennent à celles de Maxwell-Sarrau, qui viennent d'être trouvées.

Mais je dis que toujours le vecteur donné par (66) est dans le plan indiqué; car la condition (61 *bis*), soit

$$\frac{U(b^2-c^2)}{\dfrac{l}{\omega^2-a^2}}+\frac{V(c^2-a^2)}{\dfrac{m}{\omega^2-b^2}}+\frac{W(a^2-b^2)}{\dfrac{n}{\omega^2-c^2}},$$

est évidemment remplie, quels que soient Ψ et Θ.

24. Problème. — *Cette solution fournit-elle des vecteurs autres que son vecteur principal situé dans le plan normal?*

Peut-elle fournir des vecteurs perpendiculaires à ce plan?

La dernière question se résout par la négative, comme au paragraphe précédent, pour la solution B_2.

Occupons-nous de la première.

Soient

$$u=\frac{U}{\lambda},\qquad v=\frac{V}{\mu},\qquad w=\frac{W}{\nu}$$

les composantes d'un vecteur dérivé supposé situé dans le plan indiqué, de sorte que l'on ait

$$\frac{U(b^2-c^2)}{\lambda\dfrac{l}{\omega^2-a^2}}+\frac{V(c^2-a^2)}{\mu\dfrac{m}{\omega^2-b^2}}+\frac{W(a^2-b^2)}{\nu\dfrac{n}{\omega^2-c^2}}=0$$

ou, à cause des valeurs de U, V, W,

$$\frac{(\Psi-a^2\Theta)(b^2-c^2)}{\lambda}+\frac{(\Psi-b^2\Theta)(c^2-a^2)}{\mu}+\frac{(\Psi-c^2\Theta)(a^2-b^2)}{\nu}=0.$$

On tire de là

$$\frac{\Psi}{\Theta}=\frac{\dfrac{a^2(b^2-c^2)}{\lambda}+\dfrac{b^2(c^2-a^2)}{\mu}+\dfrac{c^2(a^2-b^2)}{\nu}}{\dfrac{b^2-c^2}{\lambda}+\dfrac{c^2-a^2}{\mu}+\dfrac{a^2-b^2}{\nu}}=C,$$

C étant une même constante pour toutes les directions d'ondes.

Mais des équations (69) et à cause de

$$\Psi=\mathrm{a}lU+\mathrm{b}mV+\mathrm{c}nW,$$

on tire cette autre valeur de $\frac{\Psi}{\Theta}$

$$(69\,bis)\qquad \frac{\Psi}{\Theta} = \frac{\dfrac{\mathsf{a}a^2 l^2}{\omega^2 - a^2} + \dfrac{\mathsf{b}b^2 m^2}{\omega^2 - b^2} + \dfrac{\mathsf{c}c^2 m^2}{\omega^2 - c^2}}{-1 + \dfrac{\mathsf{a}l^2}{\omega^2 - a^2} + \dfrac{\mathsf{b}m^2}{\omega^2 - b^2} + \dfrac{\mathsf{c}n^2}{\omega^2 - c^2}} = \mathrm{C},$$

qui doit être identique à l'équation aux vitesses des ondes.

Ceci exige que $\mathrm{C} = 0$, puisque l'équation aux vitesses des ondes doit se réduire au second degré.

Puis on doit avoir

$$\mathsf{a}a^2 = \mathsf{b}b^2 = \mathsf{c}c^2 = \sigma,$$

en désignant par σ la valeur commune des trois membres.

D'ailleurs la condition $\mathrm{C} = 0$ donne

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{h}{a^2} + k,$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{h}{b^2} + k,$$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{h}{c^2} + k.$$

Portant ces valeurs de $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \lambda, \mu, \nu$ dans la solution B_1, elle donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u + (h + ka^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Psi}{a^2} - \Theta'\right),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = b^2 \Delta_2 v + (h + kb^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Psi}{b^2} - b^2\Theta'\right),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \Delta_2 w + (h + kc^2)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Psi}{c^2} - \Theta'\right),$$

où

$$\Theta' = \frac{a^2 \dfrac{\partial u}{\partial x}}{h + ka^2} + \frac{b^2 \dfrac{\partial v}{\partial y}}{h + kb^2} + \frac{c^2 \dfrac{\partial w}{\partial z}}{h + kc^2},$$

$$\Psi' = \sigma\left(\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{h + ka^2} + \frac{\dfrac{\partial v}{\partial y}}{h + kb^2} + \frac{\dfrac{\partial w}{\partial z}}{h + kc^2}\right).$$

Mais on voit aisément que ces équations, où Ψ'' est égal, au facteur σ près, à la valeur Θ' donnée par les équations (64), rentrent dans la solution (63), précédemment obtenue.

Ainsi, en résumé :

1° La solution B_1, comme celle B_2, ne peut pas donner de vecteur perpendiculaire au plan normal.

2° Elle fournit deux systèmes de vecteurs situés dans ce plan.

L'un d'eux est compris dans le système analogue fourni par la solution B_2; l'autre est nouveau. Il est obtenu en faisant $\lambda = \mu = \nu$ dans les équations différentielles de la solution B_1 et comprend donc les trois constantes arbitraires a, b, c.

Cherchons le sinus de l'inclinaison de son vecteur sur le plan de l'onde; en désignant par φ cet angle, on a

$$\sin\varphi = \frac{lU + mV + nW}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}$$

ou

$$\sin\varphi = \frac{\Theta}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}.$$

Mais des équations (69), en mettant partout $\Psi' - \omega^2\Theta + \omega^2\Theta$ à la place de Ψ' et ayant égard à ce que

$$\frac{l^2}{\omega^2 - a^2} + \frac{m^2}{\omega^2 - b^2} + \frac{n^2}{\omega^2 - c^2} = 0,$$

$$\frac{l^2}{(\omega^2 - a^2)^2} + \frac{m^2}{(\omega^2 - b^2)^2} + \frac{n^2}{(\omega^2 - c^2)^2} = \frac{1}{\omega^2(r^2 - \omega^2)},$$

on tire

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Psi}{\Theta} - \omega^2\right)^2}}.$$

D'ailleurs $\frac{\Psi}{\Theta}$ est égal au second membre de (69 *bis*).

On voit donc qu'ici la direction de la vibration dépend de a, b, c. c'est-à-dire qu'elle est liée à l'existence ou à la non-existence de l'onde obscure.

Il est clair que, en disposant convenablement a, b, c pour une onde donnée, le rapport $\frac{\Psi}{\Theta}$ peut prendre toutes les valeurs. Il en résulte que cette solution peut fournir aussi des vecteurs de toute inclinaison.

1° Si l'on suppose la vitesse de l'onde obscure nulle, soit $\mathsf{a}=\mathsf{b}=\mathsf{c}=0$, on aura $\Psi=0$, d'où

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{r^2-\omega^2}}} = \frac{\sqrt{r^2-\omega^2}}{r},$$

ce qui prouve que le vecteur est perpendiculaire au rayon lumineux. Cela était aisé à prévoir. Dans ce cas, en effet, la solution coïncide avec les équations Maxwell-Sarrau.

2° Si l'on suppose $\mathsf{a}=-a^2$, $\mathsf{b}=-b^2$, $\mathsf{c}=-c^2$, ce qui supprime aussi la troisième onde, en en rendant la vitesse imaginaire, on a

$$\frac{\Psi}{\Theta}=\infty \qquad \text{ou} \qquad \Theta=0, \qquad \sin\varphi=0.$$

Le vecteur coïncide avec la vibration de Fresnel.

Les équations différentielles correspondantes, c'est-à-dire celles obtenues en faisant dans la solution B_1

$$\lambda=\mu=\nu, \qquad \mathsf{a}=-a^2, \qquad \mathsf{b}=-b^2, \qquad \mathsf{c}=-c^2,$$

sont

$$(70) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\Delta_2 U - \frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(a^2\frac{\partial U}{\partial x} + b^2\frac{\partial V}{\partial y} + c^2\frac{\partial W}{\partial z}\right)$$

et les deux symétriques. Elles diffèrent de celles précédemment obtenues pour la solution de Fresnel par les termes $-a^2\frac{\partial\Theta}{\partial x}$ et ses analogues; mais, comme le vecteur est transversal, on a ici $\Theta=0$, de sorte que le résultat, au point de vue des vecteurs lumineux, est le même que si les termes contenant Θ n'existaient pas.

3° Si l'on fait $\mathsf{a}=\mathsf{b}=\mathsf{c}=\omega_0^2$, ω_0 étant une vitesse arbitraire, on

aura

$$\frac{\Psi}{\Theta} = \omega_0^2;$$

d'où

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \dfrac{1}{\omega^2(r^2 - \omega^2)}}}.$$

Si donc on prend ω_0 égal à la vitesse d'une onde particulière, pour cette onde, on aura

$$\sin\varphi = 1;$$

les vibrations seront longitudinales et, pour les ondes voisines, elles seront quasi longitudinales.

Solution A_2.

(Elle comprend les équations de Lamé.)

25. Les équations (52) donnent, pour la direction du vecteur, les équations

$$(71)\quad \begin{cases} \omega^2 U = \mathsf{a} l\Theta + c^2 m(mU - lV) - b^2 n(lW - nU), \\ \omega^2 V = \mathsf{b} m\Theta + a^2 n(nV - mW) - c^2 l(mU - lV), \\ \omega^2 W = \mathsf{c} n\Theta + b^2 l(lW - nU) - a^2 m(nV - mW). \end{cases}$$

En les ajoutant après les avoir multipliées par l, m, n, on obtient, à cause de $\Theta = lU + mV + nW$,

$$(\omega^2 - \mathsf{a} l^2 - \mathsf{b} m^2 - \mathsf{c} n^2)\Theta = 0,$$

d'où

$$\omega^2 = \mathsf{a} l^2 + \mathsf{b} m^2 + \mathsf{c} n^2$$

pour la vitesse de l'onde obscure, comme cela doit être.

Pour les ondes visibles, on a

$$\Theta = 0,$$

qui montre que le vecteur est dans le plan de l'onde.

Si l'on ajoute les deux dernières (71) multipliées respectivement par n et $-m$ et qu'on pose, pour abréger,

$$(72)\qquad \begin{cases} nV - mW = P, \\ lW - nU = Q, \\ mU - lV = R, \end{cases}$$

il vient, à cause de $\Theta = 0$,

$$(73)\qquad \begin{cases} (a^2 - \omega^2)P = l(a^2 lP + b^2 mQ + c^2 nR), \\ (b^2 - \omega^2)Q = m(a^2 lP + b^2 mQ + c^2 nR), \\ (c^2 - \omega^2)R = n(a^2 lP + b^2 mQ + c^2 nR), \end{cases}$$

d'où l'on déduit, comme pour les équations (60), que le vecteur, dont les composantes sont P, Q, R, est dirigé suivant la projection du rayon lumineux sur le plan de l'onde. Par suite, *le vecteur principal, dont les composantes sont* U, V, W, *est situé dans le plan de l'onde dans une direction perpendiculaire à la précédente,* c'est-à-dire qu'*il est dans le plan de l'onde et dans le plan de polarisation.*

Si l'on fait $\mathsf{a} = \mathsf{b} = \mathsf{c} = 0$ dans les équations (52), on a précisément celles de Lamé; mais celles (52) donnent la même direction des vecteurs, quels que soient a, b, c.

Il est évident, d'après cela, qu'aucun des vecteurs dérivés de la solution A_2 ne peut avoir cette même direction, quelle que soit l'onde considérée, et qu'aucun ne peut non plus être constamment perpendiculaire à cette direction, c'est-à-dire situé dans le plan normal, parce qu'aucun vecteur dérivé, d'après la construction du § 18, ne peut avoir constamment la même direction que le vecteur principal dont il provient, ni lui être constamment perpendiculaire.

Solution A_1.

26. Les équations (51) donnent, pour le vecteur principal, les équations

$$(74)\qquad \begin{cases} \omega^2 U = l\Psi + c^2 m R - b^2 n Q, \\ \omega^2 V = m\Psi + a^2 n P - c^2 l R, \\ \omega^2 W = n\Psi + b^2 l Q - a^2 m P, \end{cases}$$

où

$$\Psi = \mathsf{a} l U + \mathsf{b} m V + \mathsf{c} n W$$

et P, Q, R sont définis par les expressions (57).

On y satisfait par

$$\frac{U}{l} = \frac{V}{m} = \frac{W}{n},$$

$$\omega^2 = \mathsf{a} l^2 + \mathsf{b} m^2 + \mathsf{c} n^2,$$

qui donnent la vitesse de propagation et le vecteur de l'onde obscure.

Si l'on ajoute les deux dernières multipliées respectivement par n et $-m$, on retrouve les équations (73), qui prouvent que le vecteur dont les composantes sont P, Q, R, est encore dirigé suivant la projection du rayon lumineux sur le plan de l'onde. Par suite, le vecteur principal est *situé dans le plan de polarisation*, mais il n'est plus dans le plan de l'onde, comme dans la solution précédente, à moins que $\mathsf{a} = \mathsf{b} = \mathsf{c} = 0$, d'où $\Psi = 0$; mais alors la solution B_1 rentre dans celle B_2.

Existe-t-il des vibrations dérivées qui remplissent cette dernière condition, quelle que soit l'onde? Il est facile de vérifier que non. Il faudrait en effet, pour cela, que l'on eût

$$lu + mv + nw = 0$$

ou

$$\frac{\lambda}{l} U + \frac{m}{\mu} V + \frac{n}{\nu} W = 0:$$

d'où, à cause de (74),

$$\left(\frac{l^2}{\lambda}+\frac{m^2}{\mu}+\frac{n^2}{\nu}\right)\Psi+c^2 lm\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}\right)R$$
$$+a^2 mn\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}\right)P+b^2 nl\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\lambda}\right)Q=0.$$

Pour $m=n=0$, il faut que $\Psi=0$; de même pour $m=0$ et $n=0$. Il faut, par suite, que Ψ soit nul, c'est-à-dire que l'onde obscure disparaisse, et alors l'équation ne peut être satisfaite que pour $\lambda=\mu=\nu$, ce qui rentre dans la solution précédente.

Existe-t-il des vibrations dérivées de la solution A_1 situées dans le plan normal? Il est aisé de voir aussi que non; car, pour une onde parallèle à l'un des plans coordonnés, tous les vecteurs dérivés coïncident avec le vecteur principal. Or ce dernier est perpendiculaire au plan normal et non dans ce plan.

Équations non symétriques.

27. Les coefficients des équations différentielles qui définissent $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ sont des fonctions des inverses a^2, b^2, c^2 des trois indices de réfraction du cristal que l'on considère.

Si certains de ces coefficients restent arbitraires, on doit les regarder comme des fonctions arbitraires de a^2, b^2, c^2.

Comme rien ne distingue les quantités a^2, b^2, c^2, deux des équations différentielles doivent se déduire de la troisième par une double permutation du groupe de lettres u, x, a^2; v, y, b^2 et w, z, c^2, de sorte que le déterminant Δ soit symétrique en a^2, b^2, c^2.

Or, si le cristal que l'on considère admet un seul plan de symétrie, si on le prend pour plan des x, y, les équations ne devront pas changer si l'on change simultanément w et z en $-w$ et $-z$; mais alors, d'après ce qui vient d'être dit relativement à leur composition, elles ne changeront pas non plus si l'on change simultanément les signes de u et x ou de v et y, c'est-à-dire que les équations auront nécessairement la forme (9) et feront, par suite, nécessairement partie des solutions qui précèdent.

Or tous les cristaux ont au moins un plan de symétrie, sauf ceux du système asymétrique. Les solutions qui précèdent doivent donc être considérées comme les plus générales physiquement admissibles pour tous les cristaux, sauf peut-être ceux de ce dernier système.

Pour celui-ci, même si tous les phénomènes observés subsistent symétriques, par rapport à trois plans, il ne s'ensuit pas nécessairement que les équations différentielles doivent être elles-mêmes symétriques. En effet, la surface de l'onde ne dépend que du déterminant des équations qui définissent u, v, w, et il suffit que ce déterminant se décompose en deux facteurs dont l'un soit le premier membre de l'équation aux vitesses des ondes de Fresnel pour que deux des trois ondes reproduisent la surface de l'onde.

L'équation de la troisième onde peut donc contenir des puissances impaires de l, m, n; du moins il n'y a pas, *a priori*, de raison pour qu'il n'en soit pas ainsi, ce qui exigera que les équations différentielles ne soient plus de la forme symétrique (9).

Il y a plus : même si la troisième onde ne contient que des puissances paires en l, m, n, les équations différentielles peuvent, malgré cela, ne pas être de la forme indiquée. C'est ce qu'il est aisé de comprendre.

Étant donné un système d'équations différentielles fournissant la surface de l'onde de Fresnel, si l'on y remplace u, v, w par des fonctions linéaires quelconques de ces trois quantités, on obtiendra un nouveau système d'équations différentielles qui la fournira aussi; car le déterminant du nouveau système ne différera que par un facteur constant du déterminant de l'ancien.

Or, si celui-ci restait invariable par les changements de sens de l'un quelconque des axes de coordonnées, ce qui est le caractère des équations (9), le nouveau système ne remplirait plus cette condition. Nous pourrons donc, des quatre solutions que nous avons trouvées en partant des équations (9), déduire des équations n'ayant plus cette forme symétrique et n'en reproduisant pas moins tous les phénomènes observés.

Posons

$$(75)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= \lambda u + \lambda' v + \lambda'' w,\\ V &= \mu u + \mu' v + \mu'' w,\\ W &= \nu u + \nu' v + \nu'' w;\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$(76)\qquad \begin{cases} u = \lambda_1 U + \lambda'_1 V + \lambda''_1 W, \\ v = \mu_1 U + \mu'_1 V + \mu''_1 W, \\ w = \nu_1 U + \nu'_1 V + \nu''_1 W, \end{cases}$$

où, en appelant D_1 le déterminant,

$$(77)\qquad \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix},$$

on a

$$(78)\qquad \lambda_1 = \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \lambda}, \qquad \lambda'_1 = \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \lambda'}, \qquad \ldots;$$

par suite

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \lambda'_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \lambda''_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.$$

Prenons, par exemple, les équations (54) de la solution B_2. Elle donne

$$(79)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \mathbf{a}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a^2\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + (\mathbf{a} - b^2)\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + (\mathbf{a} - c^2)\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \mathbf{b}\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + b^2\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + (\mathbf{b} - c^2)\dfrac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z} + (\mathbf{b} - a^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \mathbf{c}\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2} + c^2\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) + (\mathbf{c} - a^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} + (\mathbf{c} - b^2)\dfrac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}, \end{cases}$$

d'où

$$(80)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = {} & \lambda_1 \mathbf{a}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \lambda_1 a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + \lambda'_1(\mathbf{b} - a^2)\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} + \lambda''_1(\mathbf{c} - a^2)\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} \\ & + \lambda'_1 \mathbf{b}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda'_1 b^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + \lambda_1(\mathbf{a} - b^2)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + \lambda''_1(\mathbf{c} - b^2)\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y} \\ & + \lambda''_1 \mathbf{c}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \lambda''_1 c^2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) + \lambda_1(\mathbf{a} - c^2)\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z} + \lambda'_1(\mathbf{b} - c^2)\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z}, \end{aligned}$$

ou, en remplaçant U, V, W par leurs valeurs en u, v, w,

$$
(81)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = {} & +(\lambda_1 \lambda \mathrm{a} + \lambda'_1 \mu b^2 + \lambda''_1 \nu c^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& +(\lambda_1 \lambda a^2 + \lambda'_1 \mathrm{b}\mu + \lambda''_1 c^2 \nu)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
& +(\lambda_1 a^2 \lambda + \lambda'_1 b^2 \mu + \lambda''_1 \mathrm{c}\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
& +[\lambda'_1(\mathrm{b}-a^2)\lambda + \lambda_1(\mathrm{a}-b^2)\mu]\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} \\
& +[\lambda''_1(\mathrm{c}-b^2)\mu + \lambda'_1(\mathrm{b}-c^2)\nu]\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} \\
& +[\lambda'_1(\mathrm{b}-a^2)\lambda + \lambda_1(\mathrm{a}-b^2)\mu]\frac{\partial u}{\partial z\,\partial x} \\
& +(\lambda_1 \mathrm{a}\lambda' + \lambda'_1 b^2 \mu + \lambda''_1 c^2 \nu)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
& +(\lambda_1 a^2 \lambda' + \lambda'_1 \mathrm{b}\mu + \lambda''_1 c^2 \nu^2)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
& +(\lambda_1 a^2 \lambda' + \lambda_1 b^2 \mu' + \lambda''_1 \mathrm{c}\nu')\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\
& +[\lambda'_1(\mathrm{b}-a^2)\lambda' + \lambda_1(\mathrm{a}-b^2)\mu']\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} \\
& +[\lambda''_1(\mathrm{c}-b^2)\mu + \lambda'_1(\mathrm{b}-c^2)\nu^2]\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} \\
& +[\lambda'_1(\mathrm{b}-a^2)\lambda' + \lambda_1(\mathrm{a}-b^2)\mu']\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x} \\
& +(\lambda_1 \mathrm{a}\lambda'' + \lambda'_1 b^2 \mu'' + \lambda''_1 c^2 \nu'')\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
& +(\lambda_1 a^2 \lambda'' + \lambda'_1 \mathrm{b}\mu + \lambda''_1 c^2 \nu'')\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
& +(\lambda_1 a^2 \lambda'' + \lambda'_1 b^2 \mu'' + \lambda''_1 \mathrm{c}\nu'')\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
& +[\lambda'(\mathrm{b}-a^2)\lambda'' + \lambda_1(\mathrm{a}-b^2)\mu'')\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial y} \\
& +[\lambda''_1(\mathrm{c}-b^2)\mu'' + \lambda'_1(\mathrm{b}-c^2)\nu'']\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x} \\
& +[\lambda'_1(\mathrm{b}-a^2)\lambda'' + \lambda_1(\mathrm{a}-b^2)\mu'']\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x}.
\end{aligned}
\right.
$$

On obtiendra respectivement $\frac{\partial^2 v}{\partial b^2}$, en remplaçant dans le second membre de l'équation ci-dessus $\lambda_1, \lambda'_1, \lambda''_1$ respectivement par μ, μ'_1, μ''_1 et $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ en les remplaçant par ν_1, ν'_1, ν''_1.

Et l'on déduirait de même des solutions B_2, A_2, A_1 de nouvelles solutions renfermant chacune douze constantes arbitraires, à savoir

$$\mathsf{a}, \quad \mathsf{b}, \quad \mathsf{c},$$

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu; \quad \lambda', \quad \mu', \quad \nu'; \quad \lambda'', \quad \mu'', \quad \nu'',$$

dont les neuf dernières n'entrent que pour leurs rapports à l'une d'elles. Si l'on fait

$$\lambda' = \mu' = \nu' = \lambda'' = \mu'' = \nu'' = 0,$$

on retombe sur les solutions précédentes ne changeant pas par le changement de sens de l'un quelconque des axes.

28. *Résumé.* — En résumé :

1° Si l'on écarte les cristaux asymétriques, pour tous les autres, les équations différentielles les plus générales, physiquement admissibles, du vecteur lumineux (vibration ou autre), fournissant la surface de l'onde de Fresnel, forment quatre solutions A_1, A_2, B_1, B_2 représentées par les équations (18) et (19) du n° **7**, (26) et (27) du n° **9**.

2° Chacune de ces solutions comporte cinq constantes arbitraires, à savoir : a, b, c et les rapports $\lambda : \mu : \nu$.

3° Les trois premières définissent la vitesse de l'onde obscure, qui est la même dans les quatre solutions et donnée par l'équation

$$\omega^2 = \mathsf{a} l^2 + \mathsf{b} m^2 + \mathsf{c} n^2,$$

pour l'onde dont la normale a les cosinus de direction l, m, n.

Les trois autres influent sur la direction du vecteur.

4° Il n'est nullement nécessaire pour obtenir la surface de l'onde de supposer des vibrations ou plus généralement le vecteur lumineux, soit dans le plan de polarisation, soit dans un plan perpendiculaire.

En donnant aux constantes λ, μ, ν toutes les valeurs, on obtient des vibrations de toute inclinaison sur ce plan, et même des vibrations pouvant, pour certaines ondes particulières, être *longitudinales*.

5° Nous appelons *vecteur principal* d'une solution celui qu'on obtient en supposant $\lambda = \mu = \nu$, et *vecteurs dérivés* tous les autres.

Les équations différentielles qui donnent les composantes U, V, W du vecteur principal sont celles (51), (52), (53) et (54) du n° **18**.

La direction de ce vecteur pour une onde plane donnée est définie par les équations (57), (58), (59) et (60) du même numéro.

Les vecteurs dérivés s'en déduisent par les équations.

$$\lambda u = U, \qquad \mu v = V, \qquad \nu w = W.$$

6° Parmi tous les vecteurs possibles, les plus intéressants sont :

(*a*). Celui qui est à la fois dans le plan de polarisation et dans le plan de l'onde, c'est-à-dire perpendiculaire au plan normal;

(*b*). Ceux qui sont situés dans ce dernier plan.

En effet, à cause de la symétrie du phénomène lumineux relativement à ce plan, ces vecteurs paraissent seuls pouvoir se produire.

7° Le système d'équations le plus général possible fournissant la direction (*a*) s'obtient en faisant dans les équations (19) $\lambda = \mu = \nu$, ce qui donne le vecteur principal de la solution A_2. Sa direction est, par suite, définie par les équations (58). La solution renferme donc les trois constantes arbitraires a, b, c.

Si l'on y fait $a = b = c = 0$, ce qui supprime l'onde obscure, ces équations coïncident avec celles de Lamé et reproduisent ainsi sa théorie, obtenue aussi avec quelques variantes, par d'autres auteurs, par Cauchy, dans certains de ses Mémoires, par Mac Cullagh, Newmann et aussi par M. Massieu.

C'est la direction à laquelle on arrive quand on suppose l'éther placé dans un cristal, homogène et hétérotrope.

8° Pour les directions (*b*) qui sont en nombre illimité, il existe deux solutions : l'une s'obtient en faisant, dans les équations de la solution B_2,

$$\frac{1}{\lambda} = h + ka^2,$$

$$\frac{1}{\mu} = h + kb^2,$$

$$\frac{1}{\nu} = h + kc^2,$$

h, k étant deux constantes arbitraires; de sorte que cette solution comporte quatre constantes arbitraires a, b, c et le rapport $k : a$. On obtient ainsi les équations (63), (64) et (65).

L'inclinaison du vecteur est donnée par l'équation (65 *bis*).

Cet angle peut prendre toutes les valeurs, même celles de 90° pour certaines ondes particulières, si l'on dispose convenablement le rapport $\frac{k}{h}$.

9° Si l'on prend $k = 0$, $h = 1$, le vecteur est perpendiculaire au plan de polarisation, c'est-à-dire coïncide avec la projection du rayon lumineux sur le plan de l'onde. C'est la direction de Fresnel.

Si, en outre, on fait $\mathsf{a} = \mathsf{b} = \mathsf{c} = 0$, les équations obtenues reproduisent toute la théorie de Fresnel.

10° Si l'on fait, au contraire, $h = 0$, $k = 1$, le vecteur est perpendiculaire au rayon lumineux suivant les résultats de MM. Maxwell-Sarrau et de M. Boussinesq.

Si l'on fait en outre $\mathsf{a} = \mathsf{b} = \mathsf{c} = 0$, on aura les équations mêmes dues à ces savants.

11° La seconde des solutions fournissant un vecteur situé dans le plan normal, vecteur pouvant aussi, comme le précédent, prendre toutes les directions, même la direction longitudinale pour certaines ondes, sans cesser de reproduire la surface de l'onde, est fournie par les équations de la solution B_1, où l'on fait $\lambda = \mu = \nu$ ou, si l'on veut, les équations (53) et (59) du n° **18**, en sorte qu'elle comporte trois constantes arbitraires a, b, c.

12° De toutes les solutions obtenues, la plus probable paraît devoir être comprise dans les équations (63), (64) et (65), pour lesquelles le vecteur est dans le plan normal. C'est ce que nous nous réservons de montrer en appliquant ces diverses solutions à la réflexion cristalline et éliminant celles qui ne satisferont pas aux lois les mieux établies de ce phénomène.

Sur quelques propriétés des aires sphériques;

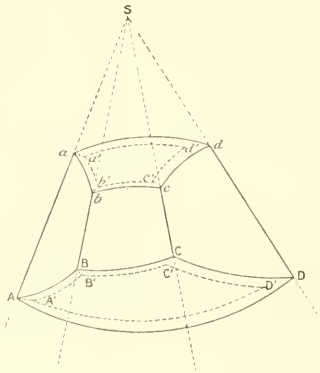
PAR M. G. HUMBERT.

1. L'objet du présent Mémoire est l'extension à la sphère de la propriété si simple et si remarquable que présente la circonférence de cercle pour la mesure des angles situés d'une manière quelconque dans son plan, et qu'on peut énoncer ainsi : la différence (ou la somme) des arcs interceptés par les deux côtés d'un angle α sur une circonférence de rayon R est égale à $2R\alpha$. Dans l'espace, ce théorème n'est pas applicable sans modification à la différence des aires que découpe sur une sphère un cône rencontrant cette surface suivant deux courbes fermées; nous montrerons que cette différence ne dépend pas seulement du rayon de la sphère et de la forme du cône, ce qui serait la généralisation directe de la proposition sur la mesure des angles plans, mais qu'il suffit, pour l'exprimer, d'introduire un nouvel élément, à savoir la distance du centre de la sphère à un plan passant par le sommet du cône et lié invariablement à ce cône. Nous verrons également que cette propriété s'étend aux surfaces développables et, en général, aux surfaces réglées; dans le cas spécial des surfaces réglées, à plan directeur, on retrouve même la propriété de l'angle plan, c'est-à-dire que la différence des aires découpées sur une sphère par une telle surface ne dépend pas de la position de la sphère dans l'espace. Enfin, les formules relatives au cône nous permettront d'évaluer la différence des aires découpées sur une sphère par une quadrique, dans le cas où l'intersection se compose de deux courbes fermées, et d'établir, relativement

à cette différence, quelques propositions curieuses parmi lesquelles nous signalerons celles qui concernent le paraboloïde elliptique.

2. Proposons-nous d'évaluer d'abord la différence des aires découpées sur une sphère de rayon R par un angle polyèdre convexe, dont toutes les arêtes rencontrent la sphère, et dont le sommet, pour fixer les idées, est supposé extérieur à la sphère (*fig.* 1). Nous ferons le raisonnement dans le cas d'un angle à quatre faces; la théorie s'étend sans changement au cas d'un angle solide convexe quelconque.

Fig. 1.



L'expression à évaluer est la différence ABCD — *abcd*; cherchons la variation que subit cette différence quand l'angle polyèdre S se déplace d'une manière quelconque dans l'espace.

Tout déplacement de cet angle peut s'obtenir : 1° par une translation; 2° par une rotation autour d'un axe qu'on peut supposer passer par le centre de la sphère. Une telle rotation n'altérant pas les aires découpées par l'angle polyèdre sur la sphère, il suffit, pour étudier la variation de la différence de ces aires, de considérer le cas d'une translation infiniment petite de l'angle polyèdre.

Soient ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 les déplacements des faces AB, BC, CD, DA, comptés normalement à ces faces; les aires découpées sur la sphère

deviennent $A'B'C'D'$ et $a'b'c'd'$; la figure convient au cas où les faces de l'angle polyèdre se sont déplacées vers l'intérieur de cet angle. Joignons par des lignes quelconques les points voisins a et a', ...; A et A', ...; appelons σ_2 l'aire ABCD, σ_1 l'aire $abcd$; on aura

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = -[AA'B'B - aa'b'b] - \ldots.$$

Or $AA'B'B$ est une portion de zone sphérique, de hauteur ε_1, et, si ρ_1 est le rayon de la circonférence à laquelle appartiennent les arcs ab et AB, on a évidemment

$$AA'B'B = 2\pi R\varepsilon_1 \frac{\text{arc}\,AB}{2\pi\rho_1}, \qquad aa'b'b = 2\pi R\varepsilon_1 \frac{\text{arc}\,ab}{2\pi\rho_1},$$

d'où

$$AA'B'B - aa'b'b = R\varepsilon_1 \frac{\text{arc}\,AB - \text{arc}\,ab}{\rho_1}.$$

L'expression $\frac{\text{arc}\,AB - \text{arc}\,ab}{2\rho}$ est égale, d'après le théorème sur la mesure des angles plans, à l'angle α_1 des droites Aa et Bb, c'est-à-dire à une des faces de l'angle polyèdre. On a donc, α_2, α_3, α_4 étant les autres faces,

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = -2\varepsilon_1\alpha_1 - 2\varepsilon_2\alpha_2 - 2\varepsilon_3\alpha_3 - 2\varepsilon_4\alpha_4.$$

Si le déplacement d'une des faces, telle que SAB, s'était effectué vers l'extérieur de l'angle polyèdre, on aurait eu à remplacer dans cette formule $-\varepsilon_1$ par ε_1, de sorte que l'on peut écrire la formule

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = 2R(\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \ldots),$$

en convenant de donner le signe + aux déplacements dirigés vers l'extérieur de l'angle solide et le signe — aux déplacements dirigés vers l'intérieur.

Si l'on suppose le sommet de l'angle situé à l'intérieur de la sphère, on aura une formule analogue, exprimant toujours la *différence* des aires découpées par l'angle sur la sphère et non leur somme, comme on pourrait le penser, par analogie avec le théorème de la mesure des

angles plans; cette formule est

$$\frac{1}{2R}(d\sigma_2 - d\sigma_1) = \varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2 + \ldots,$$

en convenant de donner le signe + aux déplacements dirigés vers l'extérieur de l'aire σ_2, et le signe — aux déplacements dirigés vers l'intérieur de cette aire. Cette règle comprend la précédente si l'on ajoute que, dans le cas où le sommet est extérieur à la sphère, σ_2 désigne la plus grande des deux aires.

Cela posé, observons qu'en nommant $h_1, h_2, \ldots$ les distances des faces de l'angle au centre de la sphère, on a

$$\varepsilon_1 = dh_1,$$

si la face SAB, en se déplaçant vers l'extérieur de l'aire σ_2, s'éloigne du centre de la sphère, c'est-à-dire si le centre est situé, par rapport à cette face, du même côté que l'aire σ_2, et qu'on a

$$\varepsilon_1 = -dh_1$$

dans le cas contraire.

La formule peut donc s'écrire

$$\frac{1}{2R}(d\sigma_2 - d\sigma_1) = \pm \alpha_1 dh_1 \pm \alpha_2 dh_2 \pm \ldots,$$

avec la convention suivante :

On prendra le signe + pour la face α si le centre de la sphère est, par rapport à cette face, du même côté que l'aire σ_2; et le signe — dans le cas contraire.

On tire de là

$$\frac{1}{2R}(\sigma_2 - \sigma_1) = \pm \alpha_1 h_1 \pm \alpha_2 h_2 \pm \ldots + \text{const.}$$

La constante est nulle, puisque, si le sommet de l'angle est au centre

de la sphère, h_1, h_2, ... sont nuls, et σ_2 égal à σ_1. Il reste donc

$$(1) \qquad \frac{1}{2R}(\sigma_2 - \sigma_1) = \pm \alpha_1 h_1 \pm \alpha_2 h_2 \pm \ldots,$$

les signes étant choisis comme il vient d'être dit.

Nous avons ainsi *l'expression de la différence des aires découpées sur une sphère de rayon* R *par un angle polyèdre dont toutes les arêtes coupent réellement la sphère*. Rappelons que, dans cette formule, α_1, α_2, ... sont les angles des faces et h_1, h_2, ... les distances de ces faces au centre de la sphère.

3. *Remarque*. — Il importe d'observer que, dans l'évaluation de la différence $d\sigma_2 - d\sigma_1$, nous n'avons nullement supposé que les quatre arêtes Aa, Bb, Cc, Dd concouraient en un même point, mais seulement que chacune d'elles rencontrait la précédente et la suivante. On en conclut sans difficulté que la différence des aires découpées sur la sphère par un solide ainsi défini est encore donnée par la formule

$$(1\ bis) \qquad \frac{1}{2R}(\sigma_2 - \sigma_1) = \pm \alpha_1 h_1 \pm \alpha_2 h_2 \pm \ldots,$$

α_1, h_1, ... ayant la même signification que plus haut.

4. Arrivons maintenant au cas où l'angle polyèdre considéré deviendrait un cône.

Prenons le sommet de ce cône pour origine des coordonnées; soient a, b, c les coordonnées du centre de la sphère. Il est clair d'abord que le double signe de la formule (1) devra disparaître en raison de la continuité : les quantités $\pm \alpha_1 h_1$ deviennent en effet $\pm h\, d\theta$, en désignant par $d\theta$ l'angle d'une génératrice du cône avec la génératrice voisine, et par h la distance du centre de la sphère au plan tangent correspondant. Or, si l'on doit prendre le signe $+$ pour une génératrice, on aura également le signe $+$ pour la suivante, et cela jusqu'au moment où h sera nul, c'est-à-dire où le plan tangent passera par le centre de la sphère, et, à partir de ce moment, d'après la règle donnée plus haut, on devra prendre la distance de ce centre au plan tangent

avec le signe $-$. Mais h est une fonction continue du paramètre qui détermine la génératrice, et cette fonction change généralement de signe en passant par zéro; il en résulte que la formule définitive est

$$\frac{1}{2R}(\sigma_2 - \sigma_1) = \int h\, d\theta.$$

h étant exprimé en fonction du paramètre qui détermine la génératrice correspondante.

Le calcul permet aisément d'évaluer $h\, d\theta$, et l'on trouve une expression sans radical.

On a en effet, $f(x, y, z) = 0$ étant l'équation du cône,

$$h = \frac{af'_x + bf'_y + cf'_z}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z}}.$$

En désignant par $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ un point du cône voisin du point (x, y, z), on a

$$f'_x x + f'_y y + f'_z z = 0,$$
$$f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = 0,$$

d'où

$$h = \frac{a[y\,dz - z\,dy] + b[z\,dx - x\,dz] + c[x\,dy - y\,dx]}{\sqrt{(y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2}}.$$

Quant à $d\theta$, angle des directions x, y, z et $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, il est donné par la formule connue

$$d\theta = \frac{\sqrt{(y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Donc enfin

$$\frac{1}{2R}(\sigma_2 - \sigma_1) = \int \frac{a(y\,dz - z\,dy) + b(z\,dx - x\,dz) + c(x\,dy - y\,dx)}{x^2 + y^2 + z^2},$$

l'intégrale étant prise le long du contour du cône.

En posant

$$\lambda = \int \frac{y\,dz - z\,dy}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\mu = \int \frac{z\,dx - x\,dz}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\nu = \int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2 + z^2},$$

ces intégrales étant toujours prises le long du contour du cône, on aura

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2\mathrm{R}[\lambda a + \mu b + \nu c].$$

Si donc on désigne par *plan d'orientation* du cône le plan

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0,$$

dont la position, par rapport au cône, comme on le voit aisément, est indépendante du choix des axes de coordonnées, et par *module* du cône la quantité

$$\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2},$$

on arrive au résultat suivant :

Théorème. — *Soit un cône, de module* ρ, *rencontrant une sphère de rayon* R *suivant deux courbes fermées, et de telle sorte que toutes les génératrices réelles du cône coupent réellement la sphère; désignons par* d *la distance du centre de la sphère au plan d'orientation du cône : la différence des deux aires que le cône découpe sur la sphère est égale à* $2\rho\mathrm{R}d$.

5. La remarque du n° **3** permet d'étendre ce théorème aux surfaces développables.

En effet, à la limite, la figure considérée dans cette remarque, formée de droites, telles que chacune d'elles rencontre la précédente et la suivante, devient une surface développable.

Soit alors $ux + vy + wz + p = 0$ l'équation du plan tangent de

cette développable, u, v, w et p étant des fonctions d'un paramètre t; on a

$$h\,d\theta = \frac{au + bv + cw + p}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}\,d\theta,$$

et, d'après (1 *bis*), *la formule qui donne la différence des aires découpées par la développable sur une sphère de centre* (a, b, c) *et de rayon* R *est*

$$\frac{1}{2\mathrm{R}}(\sigma_2 - \sigma_1) = \int \frac{au + bv + cw + p}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}\,d\theta,$$

l'intégrale s'étendant à tout le contour de la développable.

Or les intégrales $\int \frac{u\,d\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$, $\int \frac{v\,d\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$, $\int \frac{w\,d\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$ sont égales aux intégrales λ, μ, ν relatives au cône directeur de la développable; il en résulte qu'on peut écrire

$$\frac{1}{2\mathrm{R}}(\sigma_2 - \sigma_1) = \lambda a + \mu b + \nu c + \varpi,$$

et, par suite :

Si une développable rencontre une sphère de rayon R *suivant deux courbes fermées, et de telle sorte que toutes les génératrices réelles coupent réellement cette surface, la différence des deux aires qu'elle découpe sur la sphère est égale à* $2\rho\mathrm{R}d$, ρ *désignant le module du cône directeur de la développable, et* d *la distance du centre de la sphère à un plan lié à la développable et parallèle au plan d'orientation du cône directeur.*

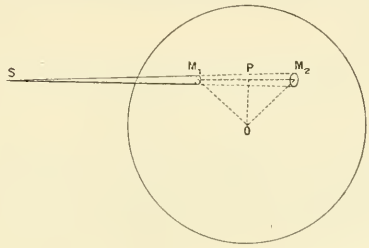
Ce plan peut être appelé *plan d'orientation de la développable.*

6. Avant de faire quelques applications des résultats qui précèdent, nous ferons connaître une autre méthode pour l'évaluation de la différence des aires dans le cas du cône. Cette méthode, qui nous a été indiquée par M. Darboux, donne une définition géométrique simple du plan d'orientation du cône; nous avons cru toutefois utile, malgré la simplicité de la nouvelle démonstration, de faire connaître celle qui est exposée précédemment, parce qu'elle s'applique aux surfaces développables et

qu'elle donne, sous une forme plus commode et plus précise, la différence des aires découpées par un angle polyèdre.

Considérons (*fig.* 2) une sphère de rayon R et de centre O, et un

Fig. 2.



cône de sommet S : un pinceau conique très petit, de sommet S et d'ouverture $d\omega$, découpe sur la sphère deux aires $d\sigma_2$ et $d\sigma_1$. On a

$$d\sigma_2 = d\omega \frac{SM_2^2}{\cos SM_2O},$$

$$d\sigma_1 = d\omega \frac{SM_1^2}{\cos SM_1O}.$$

Or les angles SM_2O et SM_1O étant égaux, il vient

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = d\omega \frac{\overline{SM_2}^2 - \overline{SM_1}^2}{\cos SM_1O}.$$

D'ailleurs

$$M_1M_2 = 2R\cos SM_1O,$$

et, par suite,

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = 2R\,d\omega \frac{\overline{SM_2}^2 - \overline{SM_1}^2}{\overline{M_1M_2}} = 2R\,d\omega \frac{\overline{SM_2}^2 - \overline{SM_1}^2}{\overline{SM_2} - \overline{SM_1}},$$

c'est-à-dire

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = 4R\,d\omega\,\overline{SP},$$

P désignant le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur M_1M_2.

Si l'on prend le point S pour origine, en désignant toujours par a,

b, c les coordonnées du centre de la sphère, il vient, x, y, z étant les coordonnées d'un point de SM_1,

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = 4R\,d\omega\,\frac{ax + by + cz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

d'où, en intégrant

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 4R\int\frac{ax + by + cz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,d\omega,$$

l'intégrale étant prise cette fois dans l'intérieur du cône.

Or, si l'on désigne par ω l'aire sphérique interceptée par le cône sur une sphère concentrique de rayon un, par X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité de cette aire, on a évidemment

$$X\omega = \int\frac{x\,d\omega}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

et deux expressions analogues pour Y et Z, les intégrales étant toujours prises dans l'intérieur du cône.

L'expression cherchée peut donc s'écrire

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 4R(aX + bY + cZ)\omega.$$

Si l'on compare cette formule à celle qui a été trouvée par la première méthode, à savoir

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2R(\lambda a + \mu b + \nu c),$$

on en conclut

$$(2) \qquad \lambda = 2\omega X, \qquad \mu = 2\omega Y, \qquad \nu = 2\omega Z;$$

et, par suite :

Le plan d'orientation d'un cône est le plan mené par le sommet normalement à la droite qui joint les centres de gravité des deux aires que découpe le cône sur une sphère concentrique de rayon

égal à l'unité; le module du cône est égal au produit de la distance de ces deux centres de gravité par la valeur de l'angle conique.

On peut dire aussi que le module est égal au moment, par rapport au sommet, des aires découpées par le cône sur une sphère concentrique de rayon un.

7. Il est facile de vérifier directement les formules (2).

En effet, l'expression $\frac{x\,d\omega}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ est la projection de l'élément $d\omega$, de la sphère concentrique au cône, sur le plan des yz; il en résulte que l'intégrale $\int \frac{x\,d\omega}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, prise dans l'intérieur du cône, représente l'aire de la projection sur le plan des yz de l'une des aires découpées par le cône sur la sphère concentrique de rayon un.

Or, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point du contour de l'aire sphérique, la projection de cette aire sera représentée par l'intégrale $\frac{1}{2}\int (y\,dz - z\,dy)$, prise le long de son contour, ou, si l'on veut, par l'intégrale $\frac{1}{2}\int \frac{y\,dz - z\,dy}{x^2+y^2+z^2}$, prise le long du contour du cône. Cette dernière intégrale étant égale à $\frac{1}{2}\lambda$, on a bien

$$\lambda = 2\omega X,$$

ce qu'il s'agissait d'établir.

8. Nous allons faire maintenant quelques applications des formules qui viennent d'être démontrées.

Observons, en premier lieu, que le théorème fondamental sur la différence des aires sphériques découpées par un cône, et sur l'évaluation de cette différence en fonction du module et du plan d'orientation du cône, s'applique non seulement aux cônes algébriques ou aux cônes transcendants ayant une équation déterminée, mais encore à toute surface conique composée de portions de cônes algébriques ou transcendants juxtaposées suivant les génératrices.

En particulier, un angle polyèdre possède un plan d'orientation et un module, qu'on peut définir comme dans le cas général, soit analytiquement, soit géométriquement.

Cela étant entendu, on peut de la formule

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2\rho R d$$

déduire les conséquences immédiates suivantes :

Le lieu des centres des sphères de rayon constant sur lesquelles une surface conique fixe découpe deux aires de différence donnée est un système de deux plans parallèles au plan d'orientation du cône et symétriques par rapport à ce plan.

En particulier :

Les sphères sur lesquelles un cône fixe découpe deux aires égales sont celles qui ont leur centre dans le plan d'orientation du cône.

Remarquons que, si l'on fait tourner un cône autour d'une droite perpendiculaire à son plan d'orientation, ce plan, qui est lié invariablement au cône, ne fait que glisser sur lui-même, et, en réalité, il ne change pas de position dans l'espace : la distance d du centre de la sphère à ce plan demeure ainsi constante, et la formule fondamentale montre qu'il en est de même de la différence $\sigma_2 - \sigma_1$. On arrive donc à ce théorème curieux :

La différence des aires que découpe un cône sur une sphère fixe reste constante quand on fait tourner ce cône autour d'une droite quelconque perpendiculaire à son plan d'orientation.

La propriété de l'angle inscrit dans une circonférence peut se généraliser dans l'espace comme il suit :

Un cône qui se déplace d'une manière quelconque, de telle façon que son sommet reste sur une sphère et que son plan d'orientation demeure tangent à la sphère, découpe sur cette surface une aire de grandeur constante.

La valeur de cette aire est donnée par la formule générale où l'on

fait $d = R$; elle est donc égale à $2\rho R^2$, ρ *étant toujours le module du cône.*

On voit, en particulier, que les cônes dont le module est égal à π découperont ainsi une aire égale à la moitié de la surface totale de la sphère.

Plus généralement :

Un cône qui se déplace d'une manière quelconque, de telle façon que son sommet reste sur une sphère et que son plan d'orientation demeure tangent à une sphère concentrique à la première, découpe sur celle-ci une aire de grandeur constante.

La valeur de cette aire est $2\rho R^2 \cos\theta$, en appelant θ l'angle constant sous lequel le plan d'orientation coupe la sphère primitive.

Dans tous ces énoncés, on suppose toujours que toutes les génératrices réelles du cône coupent réellement la sphère.

9. *Remarque.* — Lorsque le sommet du cône est sur la sphère, la courbe commune peut être une courbe fermée sans point double, ou une courbe composée de deux boucles avec un point double au sommet du cône : dans ce dernier cas, l'aire d'une des boucles doit être prise positivement, et celle de l'autre négativement.

Il peut se faire que la courbe commune à un cône et à une sphère que rencontrent toutes les génératrices réelles du cône se compose d'une seule boucle fermée : c'est ce qui se présente, par exemple, quand le cône est du troisième ordre et que son sommet est intérieur à la sphère. Les formules et les théorèmes précédents s'appliquent alors à la différence des deux aires sphériques comprises l'une à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de cette boucle.

10. Nous n'insisterons pas plus longtemps sur les conséquences immédiates de la formule fondamentale, ni sur celles qu'on pourrait déduire de la formule établie pour les surfaces développables : nous y reviendrons plus loin, à l'occasion des surfaces réglées de nature quelconque; mais, auparavant, nous donnerons quelques exemples de la détermination du module et du plan d'orientation d'une surface conique.

Trièdre. — Soit un trièdre ayant son sommet à l'origine des coordonnées; appelons α_1, α_2, α_3 les angles des faces, et h_1, h_2, h_3 les distances de ces faces au centre d'une sphère de centre (a, b, c) et de rayon R. Si le point (a, b, c) est dans l'intérieur du trièdre, et si le sommet du trièdre est extérieur à la sphère, on aura, pour la différence des aires découpées,

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2\mathrm{R}(h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + h_3\alpha_3).$$

D'après la formule générale relative aux cônes, on a aussi, en désignant par ρ le module du trièdre, et par d la distance du point (a, b, c) au plan d'orientation

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2\rho\mathrm{R}d.$$

d'où

$$h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + h_3\alpha_3 = \rho d.$$

Si l'équation de la face α_i est

$$\mathrm{A}_i x + \mathrm{B}_i y + \mathrm{C}_i z = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

et si $\lambda' x + \mu' y + \nu' z = 0$ est l'équation du plan d'orientation du trièdre, on aura donc

$$\sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i \frac{\mathrm{A}_i a + \mathrm{B}_i b + \mathrm{C}_i c}{\sqrt{\mathrm{A}_i^2 + \mathrm{B}_i^2 + \mathrm{C}_i^2}} = \rho \frac{\lambda' a + \mu' b + \nu' c}{\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}};$$

d'où l'on tire, puisque (a, b, c) est un point arbitraire,

$$\sum \alpha_i \frac{\mathrm{A}_i}{\sqrt{\mathrm{A}_i^2 + \mathrm{B}_i^2 + \mathrm{C}_i^2}} = \frac{\rho\lambda'}{\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}},$$

et deux autres équations analogues.

En désignant par l_i, m_i, n_i les angles que fait avec les trois axes la normale à la face α_i, et par p, q, r ceux que fait avec les axes la normale au plan d'orientation, ces équations peuvent s'écrire :

$$(\mathrm{E}) \qquad \begin{cases} \alpha_1 \cos l_1 + \alpha_2 \cos l_2 + \alpha_3 \cos l_3 = \rho \cos p, \\ \alpha_1 \cos m_1 + \alpha_2 \cos m_2 + \alpha_3 \cos m_3 = \rho \cos q, \\ \alpha_1 \cos n_1 + \alpha_2 \cos n_2 + \alpha_3 \cos n_3 = \rho \cos r. \end{cases}$$

Ces trois équations déterminent $\cos p$, $\cos q$, $\cos r$ et ρ, c'est-à-dire le plan d'orientation et le module du trièdre; en même temps, elles mettent en évidence la construction géométrique suivante :

Par le sommet d'un trièdre, élevons sur chacune des faces une normale dirigée vers l'extérieur du trièdre, et portons sur cette normale, à partir du sommet, une longueur égale à l'angle de la face : si l'on compose comme des forces les trois longueurs ainsi définies, la résultante obtenue est égale au module du trièdre et perpendiculaire à son plan d'orientation.

Nous avons appelé extérieur du trièdre par rapport à une face la portion de l'espace qui n'est pas située du même côté de cette face que l'arête opposée.

Le module du trièdre peut se calculer aisément en fonction des angles des faces.

Ajoutons, en effet, membre à membre, les équations (E) élevées au carré; il vient

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \\ &\quad + 2\alpha_1\alpha_2(\cos l_1 \cos l_2 + \cos m_1 \cos m_2 + \cos n_1 \cos n_2) + \ldots.\end{aligned}$$

Or, si l'on désigne par A_{12} l'angle du trièdre compris entre les faces α_1 et α_2, on a

$$-\cos A_{12} = \cos l_1 \cos l_2 + \cos m_1 \cos m_2 + \cos n_1 \cos n_2,$$

d'où

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\rho^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \\ &\quad - 2\alpha_1\alpha_2 \cos A_{12} - 2\alpha_1\alpha_3 \cos A_{13} - 2\alpha_2\alpha_3 \cos A_{23}.\end{aligned}\right.$$

Cette formule donne le module du trièdre en fonction des faces α_1, α_2, α_3 du trièdre et des angles A_{12}, A_{13}, A_{23} qu'elles comprennent; on peut, si l'on veut, exprimer tout en fonction de α_1, α_2, α_3 par les formules

$$\cos\alpha_3 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos A_{12},$$

. . . . . .

11. *Exemples.* — 1° Pour un *trièdre trirectangle*, le plan d'orientation est normal à la droite qui est l'intersection des plans bissecteurs des trois trièdres, et que, pour abréger, nous appellerons *axe* du trièdre; le module est donné par la formule (3), où

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = A_{12} = \ldots = \frac{\pi}{2};$$

on a ainsi

$$\rho = \frac{\pi}{2}\sqrt{3}.$$

On peut maintenant appliquer à ce cas particulier la formule générale; nous nous contenterons d'énoncer le résultat suivant :

Un trièdre trirectangle dont le sommet est sur une sphère de rayon R, *et dont l'axe passe par le centre de la sphère, découpe sur cette surface une aire égale à* $\pi R^2\sqrt{3}$.

Cette aire est donc incommensurable avec celle de la sphère.

2° Pour un trièdre ayant ses trois faces égales, le plan d'orientation est encore normal à l'*axe*, le mot *axe* ayant la même signification que tout à l'heure; appelons α l'angle commun des faces, A l'angle dièdre compris entre deux faces; on a

$$\rho = \alpha\sqrt{3 - 6\cos A}.$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$, le trièdre est l'angle solide d'un tétraèdre régulier et

$$\cos A = \tfrac{1}{3};$$

par suite,

$$\rho = \frac{\pi}{3}.$$

De là cette conséquence intéressante :

Si un trièdre, dont les faces sont de 60°, *a son sommet sur une sphère, et si son axe passe par le centre, il découpe sur la sphère une aire égale au sixième de l'aire totale de cette surface.*

12. Il serait aisé de multiplier ces exemples; mais nous préférons, pour ne pas lasser l'attention du lecteur, arriver à une application plus importante de nos formules.

Nous allons montrer qu'elles permettent de déterminer, sur la sphère, la *valeur d'une aire quelconque limitée par des arcs de petits cercles.*

Désignons, en effet, par P le polygone qui limite cette aire; si nous faisons passer un grand cercle par deux sommets consécutifs du polygone, nous obtenons un nouveau polygone P′, limité par des arcs de grand cercle dont on sait calculer l'aire, et, pour déduire l'aire de P de celle de P′, il suffira de savoir évaluer *la surface de la lunule comprise entre un grand cercle et un petit cercle.*

Or c'est là une application immédiate de la formule qui donne l'aire découpée sur une sphère par un trièdre dont le sommet est sur cette surface; car le trièdre dont le sommet est à l'une des extrémités de la lunule, et dont les arêtes sont la corde de cette lunule, la tangente au grand cercle et la tangente au petit cercle, découpe précisément sur la sphère l'aire de la lunule.

Si donc on appelle

α l'angle de la tangente au grand cercle et de la tangente au petit cercle à l'une des extrémités de la lunule, ces tangentes étant supposées dirigées vers la lunule;

β l'angle de la tangente considérée au petit cercle et de la corde de la lunule, cette corde étant supposée dirigée vers la seconde extrémité de la lunule;

h la distance du centre de la sphère au plan du petit cercle;

l'aire σ de la lunule sera, d'après (1),

$$\sigma = 2R[R\alpha \pm h\beta].$$

On prendra le signe + si le centre de la sphère est, par rapport au plan du petit cercle, du même côté que la lunule, et le signe — dans le cas contraire.

On peut donner une formule tout à fait pareille pour l'*aire σ de la lunule comprise entre deux petits cercles* B *et* C.

Si l'on appelle

α l'angle des tangentes aux deux cercles à l'une des extrémités de la lunule, ces tangentes étant dirigées vers la lunule;

β l'angle de la tangente considérée au petit cercle B et de la corde de la lunule;

γ l'angle analogue de la tangente au cercle C et de la corde de la lunule;

h et k les distances du centre de la sphère aux plans des cercles B et C;

on aura

$$\sigma = 2R[R\alpha \pm h\beta \pm k\gamma].$$

On prendra le signe + devant h (ou k) si le centre de la sphère est, par rapport au plan du cercle B (ou C), du même côté que la lunule, et le signe — dans le cas contraire.

13. *Angle polyèdre.* — On a, pour déterminer le plan d'orientation et le module d'un angle polyèdre convexe quelconque, des formules analogues à celles qu'on a établies pour le trièdre, et en particulier une construction géométrique de ces deux éléments identique à celle du n° **10**.

14. *Cône du second ordre.* — Il est clair que, pour un cône du second ordre, le plan d'orientation est le plan mené par le sommet normalement à l'axe de symétrie intérieur ou principal, car une sphère ayant son centre dans ce plan est coupée par le cône suivant deux courbes fermées symétriques l'une de l'autre, et comprenant des aires égales.

Cela posé, supposons que le cône soit rapporté à son sommet et à ses axes, l'axe principal étant celui des z, son équation sera

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0,$$

A, B, C étant positifs.

Le plan d'orientation étant le plan des xy, les intégrales que nous avons appelées λ et μ au n° **4** seront nulles, et le module ρ du cône

est égal à la valeur absolue de l'intégrale

$$\nu = \int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2 + z^2},$$

prise le long du contour du cône. Si l'on pose $\frac{y}{x} = \tang\varphi$ et si l'on remplace z^2 par sa valeur tirée de l'équation du cône, il vient

$$\nu = \int_0^{2\pi} \frac{C\,d\varphi}{C + A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi}$$

ou

$$\nu = C\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(A + C)\cos^2\varphi + (B + C)\sin^2\varphi},$$

et, d'après une formule connue [1],

$$\rho = C\frac{2\pi}{\sqrt{(A + C)(B + C)}}.$$

Si maintenant on appelle α et β les angles que fait l'axe principal avec les génératrices du cône situées dans les plans principaux qui passent par cet axe, il vient

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A + C}}, \qquad \sin\beta = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{B + C}}$$

et, par suite,

$$\rho = 2\pi\sin\alpha\sin\beta.$$

D'après cela, la différence des deux aires que découpe le cône considéré sur une sphère de rayon R que rencontrent toutes ses génératrices réelles a pour valeur $4\pi R d\sin\alpha\sin\beta$, d étant la distance du centre de la sphère au plan principal normal à l'axe intérieur du cône.

15. *Quadriques.* — On peut faire une application de ces résultats à l'évaluation de la différence des aires découpées sur une sphère par une surface du second ordre, qui rencontre la sphère suivant deux courbes fermées.

---

[1] Voir, par exemple, le *Cours d'Analyse* de M. Hermite, p. 396.

Soient

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

et

$$F = Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 + 2mx + 2ny + 2pz + q = 0$$

les équations de la sphère et de la quadrique F, les axes de coordonnées étant parallèles à ceux de F.

Si F coupe la sphère suivant deux courbes fermées, il est clair que l'un des deux cônes réels qui passent par l'intersection des deux surfaces aura son centre à l'intérieur de la sphère. Les axes de ce cône sont d'ailleurs parallèles à ceux de F; nous supposerons que son axe intérieur est parallèle à Oz.

Cela posé, l'équation du cône est de la forme

$$F + \theta(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) = 0,$$

θ étant une constante convenablement choisie; son sommet est à une distance d du plan xOy donnée par la relation

$$F'_d + 2\theta d = 0,$$

c'est-à-dire

$$d = -\frac{p}{P + \theta}.$$

Quant au module ρ du cône, il s'obtient en calculant, d'après la formule donnée plus haut, le module du cône qui lui est parallèle et dont le sommet est à l'origine; ce dernier cône ayant pour équation

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 + \theta(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

on aura

$$\rho = \text{mod}\, 2\pi \frac{P + \theta}{\sqrt{(M - P)(N - P)}}.$$

La différence des deux aires découpées sur la sphère par la quadrique F, ou, ce qui revient au même, par le cône considéré, sera donc, d'après la formule générale,

$$(4) \qquad \sigma_2 - \sigma_1 = 2\rho R d = 2\pi R \frac{\text{mod}\, p}{\sqrt{(M - P)(N - P)}}.$$

Cette formule met en évidence plusieurs propriétés curieuses des surfaces du second ordre.

Si on la met sous la forme

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \operatorname{mod} 2\pi R \left(\frac{-p}{P}\right) \frac{P}{\sqrt{(M-P)(N-P)}},$$

on voit que la différence des deux aires découpées par une quadrique sur une sphère est égale au produit du rayon de la sphère par la distance de son centre à *l'un* des plans principaux de la quadrique, le tout étant multiplié par un coefficient numérique, ou module, qui ne dépend que de la forme de la surface du second ordre, et nullement de sa position dans l'espace.

C'est donc une relation tout à fait analogue à celle qu'on a trouvée dans le cas des surfaces coniques; seulement, ici se présente cette circonstance remarquable que les quadriques n'ont pas seulement un, mais deux modules, le module à choisir pour l'application de la formule dépendant des positions respectives de la sphère et de la quadrique.

Pour mettre ce fait en lumière, supposons par exemple que la quadrique soit un ellipsoïde : M, N et P sont alors positifs.

Le cône ayant pour sommet l'origine qui est parallèle au cône passant par l'intersection de l'ellipsoïde et de la sphère, et dont le sommet est intérieur à la sphère, a pour équation

$$(M+\theta)x^2 + (N+\theta)y^2 + (P+\theta)z^2 = 0.$$

Nous avons supposé que l'axe principal de ce cône était Oz; on a donc

$$M+\theta > 0, \qquad N+\theta > 0, \qquad P+\theta < 0,$$

ou

$$M+\theta < 0, \qquad N+\theta < 0, \qquad P+\theta > 0,$$

ce qui exige que P soit plus grand que M et N ou plus petit que ces deux quantités; en d'autres termes, l'axe de l'ellipsoïde dirigé suivant Oz sera le plus grand ou le plus petit axe de la surface.

Ce résultat peut encore s'énoncer ainsi :

L'axe principal du cône qui passe par l'intersection d'un ellipsoïde

et d'une sphère, et dont le sommet est intérieur à la sphère, est parallèle soit au grand axe, soit au petit axe de l'ellipsoïde.

Imaginons qu'il soit d'abord parallèle au grand axe, et désignons par a, b, c [$a > b > c$] les trois demi-axes de l'ellipsoïde; P sera alors inférieur à M et N, et l'on aura

$$\frac{P}{\left(\frac{1}{a^2}\right)} = \frac{M}{\left(\frac{1}{b^2}\right)} = \frac{N}{\left(\frac{1}{c^2}\right)}.$$

Le plan principal de l'ellipsoïde dont la distance au centre de la sphère intervient dans la formule (4) est le plan du petit et du moyen axe; le module correspondant a pour valeur

$$\rho_1 = \frac{2\pi P}{\sqrt{(M-P)(N-P)}} = 2\pi \frac{\frac{1}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)}}.$$

Si, au contraire, l'axe principal du cône considéré plus haut est parallèle au petit axe de l'ellipsoïde, le plan principal de cet ellipsoïde, dont la distance au centre de la sphère intervient dans la formule, est celui du grand et du moyen axe; le module correspondant a pour valeur

$$\rho_2 = 2\pi \frac{\frac{1}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)}}.$$

On aurait des résultats analogues pour l'hyperboloïde à une nappe ou l'hyperboloïde à deux nappes.

16. Toute cette discussion peut se résumer dans les termes suivants :

Soit $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = K$ *l'équation d'une quadrique rapportée à son centre et à ses axes*; *appelons* module correspondant au plan principal $z = 0$ *la valeur absolue de la quantité*

$$\frac{2\pi P}{\sqrt{(M-P)(N-P)}},$$

et modules correspondant aux autres plans principaux *les quantités analogues obtenues en permutant* M, N *et* P. *Deux de ces modules sont réels, le troisième est imaginaire.*

Cela posé, admettons que la quadrique coupe une sphère de rayon R *suivant deux courbes fermées; le cône du second ordre qui passe par cette intersection, et dont le sommet est intérieur à la sphère, a son axe intérieur normal à l'un des plans principaux de la quadrique; soit* H *ce plan.*

La différence des deux aires découpées par la quadrique sur la sphère est égale à $2R\rho d$, ρ *désignant le module correspondant au plan* H, *et* d *la distance du centre de la sphère à ce plan* (¹).

Cette formule n'introduit jamais celui des modules qui est imaginaire, parce que le plan H ne peut pas coïncider avec le plan principal correspondant à ce module, si l'on suppose que la quadrique coupe la sphère suivant deux courbes fermées.

De là résulte immédiatement cette conséquence :

La différence des deux aires que découpe une quadrique sur une sphère ne varie pas quand on fait tourner la quadrique autour d'UN de ses axes, ou de toute autre droite parallèle à cet axe.

L'axe dont il s'agit est celui qui est normal au plan H défini plus haut.

Si l'on remarque que les modules de la quadrique ne dépendent que des rapports $\frac{M}{P}$ et $\frac{N}{P}$, on voit également que :

La différence des deux aires que découpe une quadrique sur une sphère ne varie pas quand la quadrique se déforme en restant concentrique et homothétique à elle-même;

ou, si l'on veut :

Les deux aires annulaires découpées sur une sphère par le solide

---

(¹) Il est à remarquer que ce théorème s'applique à la différence des deux aires découpées sur une sphère par un cône du second ordre, *même quand toutes les génératrices réelles du cône ne rencontrent pas la sphère.* Il suffit que l'intersection se compose de deux boucles fermées.

compris entre deux quadriques homothétiques et concentriques sont égales.

17. Dans le cas où la *quadrique* est *de révolution*, il est aisé de voir, d'après ce qui précède, que le plan H est toujours normal à l'axe de révolution; si cet axe est l'axe des z, on aura

$$M = N,$$

et le module correspondant sera

$$\rho = 2\pi \bmod \frac{P}{M - P}.$$

18. *Paraboloïde.* — Ces résultats s'appliquent aux paraboloïdes, mais avec une modification importante dans le cas où, le paraboloïde étant elliptique, le plan H est normal à l'axe de cette surface.

Soient, en effet,

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

et

$$F = Mx^2 + Ny^2 + 2mx + 2ny + 2pz + q = 0$$

les équations d'une sphère et d'un paraboloïde, dont l'axe est parallèle à l'axe des z.

Supposons que le paraboloïde coupe la sphère suivant deux courbes fermées, et que le cône qui passe par ces courbes et dont le sommet est intérieur à la sphère, ait son axe principal parallèle à l'axe du paraboloïde; on aura alors, pour la différence des deux aires découpées sur la sphère,

$$(5) \qquad \sigma_2 - \sigma_1 = 2\pi R \frac{p}{\sqrt{MN}},$$

en faisant simplement $P = 0$ dans la formule (4) [1].

Il résulte de là que, si l'on imprime au paraboloïde une translation quelconque, la différence $\sigma_2 - \sigma_1$ reste constante, car les coefficients

---

[1] Cette formule montre que M et N doivent être de même signe, c'est-à-dire que le paraboloïde est elliptique.

M, N et p ne varient pas quand on remplace x, y, z par $x+h, y+k, z+l$ dans l'équation du paraboloïde.

Comme on peut également, sans changer σ_2 et σ_1, faire tourner le paraboloïde autour d'un diamètre de la sphère, on voit que la différence $\sigma_2 - \sigma_1$ restera invariable pour tout déplacement du paraboloïde dans l'espace.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soit un paraboloïde elliptique coupant une sphère suivant deux courbes fermées; le cône du second ordre qui passe par ces courbes, et dont le sommet est intérieur à la sphère, a son axe intérieur parallèle à l'une des directions principales du paraboloïde : supposons-le parallèle à l'axe de cette surface.

La différence des deux aires que découpe le paraboloïde sur la sphère reste constante quand le paraboloïde se déplace d'une manière quelconque dans l'espace, la condition précédente étant toujours supposée remplie.

Si, au contraire, l'axe intérieur du cône dont il vient d'être question était normal à l'axe du paraboloïde, la différence des deux aires aurait la même expression que dans le cas des quadriques à centre.

Si le paraboloïde est de révolution, le cône dont il s'agit a toujours son axe intérieur parallèle à celui de la surface; le théorème s'énonce alors plus simplement et d'une manière tout à fait générale :

La différence des deux aires que découpe sur une sphère un paraboloïde de révolution est indépendante des positions respectives des deux surfaces dans l'espace.

D'après la formule (5), elle est égale à $4\pi R\varpi$, ϖ désignant le paramètre de la parabole méridienne.

Le paraboloïde elliptique nous présente ainsi le premier exemple d'une surface pouvant découper sur une sphère deux aires dont la différence ne dépend que de la forme des deux surfaces : c'est une généralisation directe de la propriété de l'angle plan et de la circonférence; nous indiquerons, à la fin de ce travail, une infinité d'autres généralisations de même nature, mais le paraboloïde est la surface la plus simple à laquelle s'appliquent ces extensions si curieuses.

Pinceaux de droites. — Nous terminerons ce Mémoire en étendant aux *surfaces réglées* la propriété établie pour le cône et pour les surfaces développables ; quelques remarques relatives aux aires découpées par *un pinceau de droites* sur un plan et sur une sphère serviront de base à cette extension.

Soit $d\omega$ l'aire infiniment petite que découpe un pinceau de droites sur un plan normal à l'axe du pinceau en un point M : il est clair que l'aire $d\sigma$ découpée sur un plan passant par M et faisant avec le premier un angle θ sera donnée par la formule

$$d\omega = d\sigma \cos\theta,$$

car l'aire $d\omega$ peut être considérée comme la projection de l'aire $d\sigma$.

Cela posé, cherchons comment varie l'aire découpée par le pinceau sur un plan qui se déplace en restant parallèle à lui-même.

Soient

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \alpha z + p, \\ y = \beta z + q \end{cases}$$

les équations d'une droite : si l'on imagine que α et β soient fonctions de p et q, et si l'on donne à p et q des valeurs voisines de deux quantités p_0 et q_0, on obtient, par les équations précédentes, une infinité de droites appartenant à un pinceau infiniment délié.

L'aire découpée par ce pinceau sur un plan $z =$ const. sera

$$d\sigma' = \operatorname{mod}\left(\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial p}\right) dp\, dq.$$

x et y étant des fonctions de p et q définies par les équations (6), où z est une constante. On a ainsi

$$d\sigma' = \operatorname{mod}(\mathrm{A}z^2 + \mathrm{B}z + 1)\, dp\, dq,$$

étant posé

$$\mathrm{A} = \frac{\partial\alpha}{\partial p}\frac{\partial\beta}{\partial q} - \frac{\partial\alpha}{\partial q}\frac{\partial\beta}{\partial p}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\partial\alpha}{\partial p} + \frac{\partial\beta}{\partial q}.$$

Ces formules permettent d'évaluer l'aire découpée par le pinceau sur un plan quelconque P.

Soient en effet

z l'ordonnée du point M où le plan P rencontre l'axe du pinceau;
θ l'angle de la normale à ce plan avec l'axe du pinceau;
θ' l'angle de ce même axe avec Oz;
$d\sigma$ et $d\sigma'$ les aires découpées par le pinceau sur le plan P et sur le plan horizontal mené par M.

On a

$$d\sigma \cos\theta = d\sigma' \cos\theta',$$

car chacun des deux membres est égal à l'aire découpée par le pinceau sur le plan normal à son axe au point M.

On en conclut

$$d\sigma = \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \operatorname{mod}(Az^2 + Bz + 1)\, dp\, dq.$$

On sait que toutes les droites du pinceau rencontrent deux mêmes droites; si le plan sécant passe par l'un des points où ces droites coupent l'axe du pinceau, l'aire découpée sur ce plan est nulle; on voit ainsi que les deux racines de l'équation $Az^2 + Bz + 1 = 0$ sont les ordonnées des deux *points focaux* du pinceau.

20. Cela posé, soit une sphère de rayon R

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + k = 0.$$

Proposons-nous de calculer les deux aires que le pinceau (6) découpe sur cette surface : on peut évidemment substituer à la sphère son plan tangent en chacun des points M_1 et M_2 où elle est rencontrée par l'axe du pinceau.

Si donc on désigne par θ l'angle que fait l'axe du pinceau avec chacun des deux rayons de la sphère qui aboutissent aux points M_1 et M_2; par θ' l'angle de ce même axe avec Oz; par z_1 et z_2 les ordonnées de M_1 et M_2, on aura

$$d\sigma_1 = \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \operatorname{mod}(Az_1^2 + Bz_1 + 1)\, dp\, dq,$$

$$d\sigma_2 = \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \operatorname{mod}(Az_2^2 + Bz_2 + 1)\, dp\, dq.$$

Deux cas sont maintenant à distinguer.

Si les deux points focaux du pinceau sont tous deux à l'intérieur, ou tous deux à l'extérieur de la sphère, les trinômes $Az_1^2 + Bz_1 + 1$ et $Az_2^2 + Bz_2 + 1$ sont de même signe, et l'on a

$$d\sigma_2 - d\sigma_1 = \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \operatorname{mod}[A(z_2^2 - z_1^2) + B(z_2 - z_1)]\, dp\, dq.$$

Si au contraire les deux points focaux sont l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de la sphère, on aura

$$d\sigma_2 + d\sigma_1 = \frac{\cos\theta'}{\cos\theta} \operatorname{mod}[A(z_2^2 - z_1^2) + B(z_2 - z_1)]\, dp\, dq.$$

Or on peut écrire

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\frac{M_1M_2}{R} = \frac{1}{2R}\frac{z_2 - z_1}{\cos\theta'}$$

et, par suite,

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = 2R\cos^2\theta' \operatorname{mod}\left[\frac{A(z_2^2 - z_1^2) + B(z_2 - z_1)}{z_2 - z_1}\right] dp\, dq,$$

c'est-à-dire

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = \frac{2R}{\alpha^2 + \beta^2 + 1} \operatorname{mod}[A(z_2 + z_1) + B]\, dp\, dq.$$

En cherchant les z des points d'intersection de la droite

$$x = \alpha z + p, \qquad y = \beta z + q$$

avec la sphère, on trouve

$$z_1 + z_2 = \frac{2(a\alpha + b\beta + c - \alpha p - \beta q)}{\alpha^2 + \beta^2 + 1};$$

donc enfin

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = \frac{4R}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2}[A(a\alpha + b\beta + c - \alpha p - \beta q) + B(\alpha^2 + \beta^2 + 1)]\, dp\, dq,$$

en prenant la valeur absolue du second membre.

Cette formule peut être interprétée géométriquement d'une manière très simple.

Le plan mené normalement à l'axe du pinceau par le milieu du segment que déterminent les deux points focaux a pour équation

$$\alpha(x - \alpha\zeta - p) + \beta(y - \beta\zeta - q) + z - \zeta = 0,$$

ζ désignant l'ordonnée de ce point milieu; or, d'après ce qui a été dit, on a

$$\zeta = -\frac{B}{A},$$

et l'équation du plan devient

$$A\alpha x + B\beta y + Az - A(\alpha p + \beta q) + B(\alpha^2 + \beta^2 + 1) = 0.$$

La distance δ du centre de la sphère à ce plan est donc

$$\delta = \frac{A(a\alpha + b\beta + c - \alpha p - \beta q) + B(\alpha^2 + \beta^2 + 1)}{A\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}}$$

et, par suite,

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = \frac{4R\delta}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} A\, dp\, dq.$$

Or, si l'on fait un changement de variables en prenant pour variables indépendantes α et β à la place de p et q, il faut remplacer dans cette formule $A\,dp\,dq$ par $d\alpha\, d\beta$, puisque A est le jacobien de α et β, considérés comme fonctions de p et q. Il vient donc

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = \frac{4R\delta}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} d\alpha\, d\beta.$$

La quantité $\dfrac{d\alpha\, d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$ a une signification géométrique simple; elle représente l'aire découpée sur une sphère de rayon un par le faisceau des droites menées du centre de la sphère parallèlement aux droites du pinceau.

Désignons par $\frac{\omega}{2}$ cette aire, qu'on peut appeler l'*ouverture du pin-*

ceau, on a finalement

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = 2R\,\delta\omega.$$

On peut donc énoncer ce théorème :

La somme algébrique des deux aires découpées sur une sphère par un pinceau de droites est égale au double produit du rayon de la sphère par l'ouverture du pinceau et par la distance du centre de la sphère au plan de symétrie des deux points focaux du pinceau.

Ce plan est toujours réel, même si les points focaux sont imaginaires.

La *somme algébrique* dont il s'agit sera la différence des deux aires si les points focaux sont simultanément à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère; ce sera la somme des aires si l'un seulement des points focaux est intérieur à la sphère.

21. Le résultat qui précède devient illusoire si ω est nul, c'est-à-dire si les droites du pinceau sont parallèles à un même plan : en ce cas, un des points focaux est à l'infini, A est nul, et le raisonnement n'est plus applicable.

Supposons donc que A soit nul; la formule qui donne l'aire découpée par le pinceau sur un plan sera

$$d\sigma = \frac{\cos\theta'}{\cos\theta}(Bz+1)\,dp\,dq$$

et la somme algébrique des deux aires découpées sur une sphère devient

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = \frac{2R}{(\alpha^2+\beta^2+1)}B\,dp\,dq.$$

On prendra le signe + si le point focal à distance finie est intérieur à la sphère, et le signe — s'il est extérieur.

Cette formule ne renferme que le rayon de la sphère et ne contient pas les coordonnées du centre. Ainsi :

La somme algébrique des deux aires découpées sur une sphère

par un pinceau de droites, toutes parallèles à un même plan, est égale au produit du rayon de la sphère par un coefficient constant, qui ne dépend que de la nature du pinceau. Cette somme reste donc constante quand le pinceau se déplace dans l'espace d'une manière quelconque.

La somme algébrique qui intervient dans ce théorème est la différence des deux aires, si le point focal du pinceau situé à une distance finie se trouve à l'extérieur de la sphère; elle est la somme des deux aires dans le cas contraire.

22. On peut, en s'appuyant sur ces propositions, démontrer quelques résultats simples relatifs aux surfaces réglées.

En raison de la variété des formes que peuvent présenter ces surfaces, il ne paraît pas possible d'énoncer des théorèmes généraux sur la somme ou la différence des aires que découpe une telle surface sur une sphère; nous nous bornerons, dans ce qui suit, à traiter quelques cas spéciaux, très étendus d'ailleurs, qui offrent de l'intérêt par eux-mêmes, et dont la discussion montrera comment la question peut être abordée dans chaque exemple particulier.

23. *Surfaces réglées à plan directeur.* — Considérons, pour commencer, une surface Σ, à plan directeur et à deux directrices, dont l'une est une droite D et l'autre une courbe plane C, située dans un plan parallèle à D : on peut toujours supposer que cette courbe n'a pas de point double; sinon, on la décomposerait en deux ou plusieurs courbes fermées, sans point double.

La surface Σ est un *conoïde*, composé de deux nappes, qui se croisent le long de la directrice D; pour distinguer ces nappes, nous appellerons *nappe antérieure* celle qui est décrite par les génératrices rectilignes, prolongées à partir de la droite D, du côté de la courbe C, et *nappe postérieure* celle qui est décrite par les génératrices prolongées dans l'autre sens.

Remarquons maintenant que le solide compris à l'intérieur du conoïde Σ peut être décomposé en éléments de volume infiniment petits par des plans parallèles au plan directeur et des plans passant par la droite D : deux couples de ces plans, deux à deux infiniment voisins,

limitent une sorte de coin infiniment délié; les coins ainsi obtenus remplissent une et une seule fois l'intérieur du conoïde, car ils n'empiètent pas les uns sur les autres. Pour évaluer l'aire découpée par le conoïde sur une surface, il suffit donc de faire la somme des aires découpées par les tranches élémentaires.

Or chacune de ces tranches peut être considérée comme un pinceau de droites, toutes parallèles au plan directeur, et dont le point focal à distance finie est sur la droite D; la somme algébrique des aires découpées par ce pinceau sur une sphère est, comme on l'a vu, égale à $R\,d\varpi$, $d\varpi$ étant un coefficient infiniment petit, indépendant de la position de la sphère; il en résulte que la somme algébrique des aires découpées sur la sphère par le conoïde est égale à $R\int d\varpi$, et qu'elle ne dépend par conséquent pas des positions respectives de la sphère et du conoïde, pourvu, bien entendu, que toutes les génératrices réelles de la seconde surface rencontrent réellement la première.

Pour déterminer le signe à attribuer aux aires sphériques, il suffit d'appliquer à chacune des tranches élémentaires la règle qui a été donnée plus haut : soient alors A et B deux courbes fermées suivant lesquelles le conoïde coupe la sphère; admettons pour plus de généralité que chacune de ces courbes soit tracée en partie sur la nappe antérieure et en partie sur la nappe postérieure du cône. On donnera le signe + aux aires qui correspondent aux portions de A situées sur la nappe antérieure, le signe — à celles qui correspondent aux portions de A sur la nappe postérieure, et pour la courbe B, on prendra les signes inverses.

Si, par exemple, les courbes A et B sont situées sur une même nappe du conoïde, c'est la différence des aires qui intervient; c'est la somme si A et B sont sur deux nappes différentes.

24. On peut énoncer maintenant le théorème suivant :

La somme algébrique des aires découpées sur une sphère par un conoïde dont toutes les génératrices réelles rencontrent la sphère est égale au produit du rayon par un coefficient qui ne dépend que de la forme du conoïde.

Cette somme reste donc constante quand la sphère se déplace

d'une manière quelconque dans l'espace, sans cesser de rencontrer toutes les génératrices réelles de la surface réglée.

Ce théorème s'applique non seulement aux conoïdes, mais *à toutes les surfaces réglées à plan directeur, ou à toutes les portions continues de ces surfaces, qui n'admettent qu'une seule directrice multiple,* parce que, dans ce cas, on peut toujours décomposer le solide intérieur à la surface en coins infiniment déliés, ayant leurs sommets sur la directrice multiple, et n'empiétant pas les uns sur les autres, ainsi qu'on l'a fait dans le cas du conoïde.

Nous avons ainsi une infinité de surfaces, jouissant par rapport à la sphère de la même propriété que l'angle plan par rapport à la circonférence; à ces surfaces, il convient d'ajouter, comme on l'a vu plus haut, le paraboloïde elliptique, qui est d'ailleurs une surface réglée à plan directeur, mais à génératrices imaginaires.

Comme exemple de surfaces auxquelles le théorème précédent s'applique simplement, on doit citer le conoïde droit connu sous le nom de *coin de Wallis;* la détermination du signe à donner aux aires sphériques se fait en ce cas sans aucune difficulté.

25. *Surfaces réglées.* — La formule générale donnée au n° **20** pour les pinceaux de droites peut être appliquée comme il suit aux surfaces réglées.

Soit, par exemple, une surface réglée Σ définie par deux directrices rectilignes, D_1 et D_2, et une troisième directrice plane, C, fermée et sans point double. Décomposons l'aire comprise à l'intérieur de C en éléments infiniment petits, n'empiétant pas les uns sur les autres, et considérons le pinceau des droites qui s'appuient sur D_1, D_2 et rencontrent le plan de C à l'intérieur de l'un des éléments : il est clair que les pinceaux ainsi obtenus rempliront l'intérieur du solide compris dans la surface Σ, et n'empiéteront pas les uns sur les autres. Pour calculer la différence des aires découpées par Σ sur une sphère, il suffit donc de faire la somme des différences analogues pour les pinceaux introduits, et d'appliquer à cet effet les formules du n° **20**, en observant que les points focaux de l'un quelconque des pinceaux sont sur D et D_1.

La somme algébrique des aires découpées par un pinceau sur une

sphère de centre a, b, c et de rayon R est de la forme

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = 2R(\lambda' a + \mu' b + \nu' c + \varpi')\,d\omega',$$

λ', μ', ν', ϖ' et $d\omega'$ étant des coefficients qui dépendent seulement de la nature du pinceau; il résulte de là que la somme algébrique des aires découpées sur la sphère par Σ sera de la même forme

$$\sigma_2 \pm \sigma_1 = 2R(\lambda a + \mu b + \nu c + \varpi),$$

λ, μ, ν, ϖ étant des coefficients qui dépendent des éléments définissant la surface Σ.

Cette expression est analogue à celle qui a été trouvée dans le cas des cônes et des surfaces développables; on peut l'écrire, en posant

$$\rho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2},$$
$$\sigma_2 \pm \sigma_1 = 2R\rho\, d,$$

formule où d désigne la distance du centre de la sphère au plan

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \varpi = 0,$$

qu'on peut appeler *plan d'orientation* de la surface réglée; nous appellerons de même la constante ρ *module* de la surface.

On peut démontrer que le module de la surface réglée est généralement égal à celui du cône directeur, et que son plan d'orientation est parallèle à celui de ce cône.

Reprenons à cet effet les formules du n° **20**, en supposant que le plan de la courbe directrice C soit celui des xy. On a, pour la somme algébrique des aires découpées sur une sphère de rayon R et de centre a, b, c par le pinceau des droites infiniment voisines de la droite

$$x = \alpha z + p, \qquad y = \beta z + q;$$

la formule

$$d\sigma_2 \pm d\sigma_1 = \frac{4R}{(\alpha^2+\beta^2+1)^2}\,[A(a\alpha + b\beta + c - \alpha p - \beta q) + B(\alpha^2+\beta^2+1)]\,dp\,dq;$$

d'où

$$\sigma_2 \pm \sigma_1 = 2R \int\int \frac{2A(\alpha\alpha + b\beta + c - \alpha p - \beta q) + 2B(\alpha^2 + \beta^2 + 1)}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2}\, dp\, dq,$$

l'intégrale étant prise à l'intérieur de la courbe C.

On a donc

$$\lambda = \int\int \frac{2A\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2}\, dp\, dq,$$

$$\mu = \int\int \frac{2A\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2}\, dp\, dq,$$

$$\nu = \int\int \frac{2A}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2}\, dp\, dq.$$

Si l'on prend comme variables α et β à la place de p et de q, on aura, puisque A est égal à $\frac{\partial\alpha}{\partial p}\frac{\partial\beta}{\partial q} - \frac{\partial\alpha}{\partial q}\frac{\partial\beta}{\partial p}$,

$$\lambda = \int\int \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2}\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\mu = \int\int \frac{2\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2}\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\nu = \int\int \frac{2}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2}\, d\alpha\, d\beta,$$

les intégrales étant prises cette fois à l'intérieur du cône directeur de la surface réglée, puisque, si le point p, q est sur la courbe C, le point α, β, 1 est un point du cône formé par les parallèles qu'on peut mener de l'origine aux génératrices de la surface.

Les variables p et q ont ainsi disparu; il en résulte que les quantités λ, μ et ν ont les mêmes valeurs pour toutes les surfaces réglées qui ont même cône directeur, et en particulier qu'elles ont, pour une de ces surfaces, les mêmes valeurs que pour le cône directeur, ce qui démontre la proposition à établir. On peut d'ailleurs la vérifier directement comme il suit.

L'expression $\frac{d\alpha\, d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$ est l'aire infiniment petite $d\omega$, que découpe un pinceau conique ayant pour axe la direction α, β, 1, et compris à l'intérieur du cône directeur, sur une sphère concentrique de

rayon un : on a, d'après cela, en désignant par x, y, z les coordonnées d'un point de cette sphère,

$$\lambda = \int\int \frac{2x\,d\omega}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\mu = \int\int \frac{2y\,d\omega}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\nu = \int\int \frac{2z\,d\omega}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

les intégrales étant prises à l'intérieur du cône directeur : ce sont précisément les formules établies aux n^{os} **6** et **7** dans le cas du cône.

26. On peut donc énoncer le théorème suivant :

La somme algébrique des aires découpées sur une sphère de rayon R *par une surface réglée, à deux directrices rectilignes, dont toutes les génératrices réelles rencontrent la sphère, est égale à* $2\zeta Rd$, ζ *désignant le module du cône directeur de la surface et* d *la distance du centre de la sphère à un plan, lié à la surface réglée, et parallèle au plan d'orientation du cône directeur.*

Ce théorème s'étend évidemment à toutes les surfaces réglées, ou à toutes les portions de surfaces réglées, telles qu'on puisse décomposer le solide qu'elles renferment en pinceaux rectilignes n'empiétant pas les uns sur les autres.

On peut déduire de la proposition précédente des conclusions analogues à celles qui ont été établies pour les cônes; ainsi, la somme algébrique des aires découpées reste constante quand la surface réglée tourne autour d'un axe normal au plan d'orientation du cône directeur.

Sur les transformations d'une forme quadratique en elle-même;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

Nous déterminons dans ce Mémoire les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire une substitution linéaire pour être capable de transformer en elle-même une forme quadratique de discriminant différent de zéro.

Ces conditions étant supposées remplies, nous montrons que la substitution donnée S et l'une quelconque F des formes quadratiques (de discriminant $\gtrless 0$), qu'elle transforme en elle-même, peuvent être ramenées simultanément à une expression canonique dépendant exclusivement des invariants de S.

De là résulte cette conséquence, que les diverses formes F sont transformables les unes dans les autres par des substitutions linéaires qui n'altèrent pas l'expression de S.

ANALYSE.

1. Considérons une forme quadratique F de déterminant $\gtrless 0$, et une substitution linéaire S qui la transforme en elle-même.

Pour nous rendre compte des propriétés de ce système, nous nous proposerons de chercher une forme type à laquelle on puisse ramener simultanément F et S par un choix convenable des variables indépendantes.

On peut tout d'abord, sans se préoccuper de la forme F, ramener la substitution S à son expression canonique. Rappelons, à ce sujet, les résultats connus (*voir*, pour la démonstration, notre *Traité des substitutions*, Livre II, Chap. II, § V et VI).

Soient

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{matrix}$$

les coefficients de F; formons l'équation caractéristique

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - s & \alpha_{12} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - s & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Soient $s_1, s_2, \dots$ les racines distinctes de cette équation. On pourra, en prenant pour nouvelles variables des fonctions linéaires convenables des variables primitives, donner à S la forme canonique suivante :

$$S = \left| \begin{matrix} x'_1, x'_2, \dots, x'_m & s_1 x'_1, s_1(x'_2 + x'_1) & \dots & s_1(x'_{m'} + x'_{m'-1}) \\ x''_1, \dots, x''_{m''} & s_1 x''_1, \dots\dots\dots & \dots & s_1(x''_{m''} + x''_{m''-1}) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ y'_1, y'_2, \dots, y'_n & s_2 y'_1, s_2(y'_2 + y'_1) & \dots & s_2(y'_n + y_{n-1}) \\ y''_1, \dots, y''_n & s_2 y''_1, \dots\dots\dots & \dots & s_2(y''_{n'} + y_{n'-1}) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \end{matrix} \right|.$$

On voit que les nouvelles variables se répartissent en classes x, y, ... correspondant aux diverses racines $s_1, s_2, \dots$ de l'équation $\Delta = 0$.

Le nombre total des variables de chaque classe est égal au degré de multiplicité de la racine correspondante. Dans chacune de ces classes, celle des x par exemple, les variables se groupent en une ou plusieurs

séries $x', x'', \ldots$ telles que S remplace les variables de chaque série par des fonctions linéaires très simples de ces seules variables.

Les racines $s_1, s_2, \ldots$ et les nombres $m', m'', \ldots, n', n'', \ldots$ des variables de chaque série sont des invariants. La substitution S n'est donc susceptible que d'une forme canonique unique. Toutefois, il existe des changements de variables qui n'altèrent pas cette forme canonique, et qui pourront être utilisés pour simplifier subsidiairement l'expression de F.

2. Ces changements de variables rentrent dans les deux catégories suivantes :

1° Soient $x'_1, \ldots, x'_{m'}; x''_1, \ldots, x''_{m''}; \ldots; x^\lambda_1, \ldots, x^\lambda_{m^\lambda}$ des séries appartenant à la même classe et contenant un même nombre m' de variables; on n'altérera pas S en opérant sur ces variables les substitutions linéaires suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} x'_k & a_{11}x'_k + \ldots + a_{1\lambda}x^\lambda_k \\ x''_k & a_{21}x'_k + \ldots + a_{2\lambda}x^\lambda_k \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^\lambda_k & a_{\lambda 1}x'_k + \ldots + a_{\lambda\lambda}x^\lambda_k \end{array}\right\} k = 1, 2, \ldots, m',$$

où les a désignent des coefficients quelconques dont le déterminant ne soit pas nul.

2° On ne l'altérera pas davantage par une substitution de la forme suivante

$$\begin{array}{lll} x^u_{m'} & x^u_{m'} & + a x^i_k, \\ x^u_{m'-1} & x^u_{m-1} & + a x^i_{k-1}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & , \\ x^u_{m'-k+1} & x^u_{m-k+1} & + a x^i_k, \end{array}$$

x^i_k étant une variable quelconque de la même classe que x^u_m, mais dont l'indice k soit $\overline{\gtrless} m'$.

3. Supposons donc la substitution S ramenée à la forme canonique que nous venons d'indiquer. La forme F doit être transformée en elle-même par cette substitution; cherchons les conséquences qui en découlent.

Soient x, y deux classes quelconques de variables, et soit

$$B_{x,y} = \Sigma A^{ii'}_{kk'} x^i_k y^{i'}_{k'}$$

l'ensemble des termes de F qui contiennent leurs rectangles mutuels. Nous appellerons *rang* de chacun de ces termes, tel que $A^{ii'}_{kk'} x^i_k y^{i'}_{k'}$, la somme $k + k'$ des indices des variables qui y figurent.

Dans la transformée FS de F par la substitution S, ce terme se trouvera remplacé par $s_1 s_2 A^{ii'}_{kk'} (x^i_k + x^i_{k-1})(y^{i'}_{k'} + y^{i'}_{k'-1})$. Ce produit développé donne quatre termes, tous d'ordre $< k + k'$, sauf le premier, qui sera $s_1 s_2 A^{ii'}_{kk'} x^i_k y^{i'}_{k'}$.

L'ensemble des termes bilinéaires en x et y et de rang maximum contenus dans FS est donc égal à l'ensemble des termes analogues dans F, multiplié par $s_1 s_2$. L'identité

$$FS = S$$

ne pourra donc subsister que si $s_1 s_2 = 1$, à moins que les termes bilinéaires en x et y ne disparaissent complètement de F.

Rien dans le raisonnement précédent ne suppose que les deux classes x et y sont différentes. Donc, si $s_1^2 \gtrless 1$, F ne pourra contenir aucun terme quadratique par rapport aux x.

Le déterminant de F étant d'ailleurs supposé $\gtrless 0$, cette forme doit contenir les variables x. Si donc $s_1^2 \gtrless 1$, il existe nécessairement une autre classe y correspondant à une racine $s_2 = \frac{1}{s_1}$; on aura d'ailleurs

$$s_2^2 \gtrless 1,$$

et, les autres racines $s_3, \ldots$ différant de s_1 et de s_2, on aura

$$s_1 s_3 \gtrless 1, \quad s_2 s_3 \gtrless 1, \quad \ldots;$$

on aura donc

$$F = B_{x,y} + \Phi,$$

$B_{x,y}$ étant une forme bilinéaire par rapport aux x et aux y, et Φ ne contenant que les autres variables. D'ailleurs, le déterminant de $B_{x,y}$, entrant en facteur dans celui de F, ne sera pas nul; donc les va-

riables x et les variables y seront en nombre égal, et s_1, $\frac{1}{s_1}$ seront des racines du même degré de multiplicité pour l'équation $\Delta = 0$.

Soit, au contraire, $s_1^2 = 1$; on aura

$$s_1 s_2 \gtrless 1, \quad \ldots.$$

Donc F ne contiendra pas les rectangles des variables x avec les variables des autres séries, et sera de la forme

$$Q_x + \Phi,$$

Q_x étant quadratique par rapport aux x, et Φ ne les contenant plus.

Nous obtenons donc ce premier résultat :

L'équation caractéristique $\Delta = 0$ de la substitution S est nécessairement réciproque, et la forme F se décompose en une somme de formes partielles, à savoir :

1° *Des formes $B_{x,y}$ bilinéaires par rapport aux deux classes de variables correspondant à deux racines réciproques s_1 et $\frac{1}{s_1}$ différentes de l'unité.*

2° *Des formes quadratiques par rapport aux variables des classes qui correspondent aux racines $+1$ et -1, lorsque l'équation caractéristique admet l'une ou l'autre de ces quantités pour racines.*

La substitution S étant elle-même un produit de substitutions partielles dont chacune n'altère que les variables correspondant à un couple de racines de variables réciproques, ou à la racine $+1$, ou à la racine -1, on voit que la question se trouve ramenée au cas où l'équation caractéristique n'admet que deux racines réciproques et du même ordre de multiplicité, ou une seule racine égale à ± 1.

4. Considérons d'abord le premier cas. La forme F se réduira à

$$B_{x,y} = \Sigma x_h^i \eta_h^i,$$

les η_{ik}^i étant des fonctions des y, linéairement distinctes, puisque le déterminant n'est pas nul.

Prenons les η_{ik}^i pour variables indépendantes à la place des y. La substitution S, remplaçant les y par des fonctions des y, remplacera les η_{ik}^i par des fonctions des mêmes variables, que nous désignerons respectivement par $\frac{1}{s_1}H_k^i$. On aura donc

$$S = \begin{vmatrix} x_1^i, \ldots, x_{m^i}^i & s_1 x_1^i, \ldots, s_1(x_{m^i}^i + x_{m^i-1}^i \\ \eta_{11}^i, \ldots, \eta_{1m^i}^i & \frac{1}{s_1}H_1^i, \ldots, \frac{1}{s_1}H_{m^i}^i \end{vmatrix}.$$

Il est aisé de déterminer les fonctions H_k^i d'après la condition que S transforme en elle-même la fonction

$$\Sigma x_k^i \eta_{1k}^i.$$

Elle la change, en effet, en

$$\Sigma(x_k^i - x_{k-1}^i)H_k^i$$

(sauf à remplacer x_{k-1}^i par zéro, lorsque $k - 1 = 0$).

Identifiant cette expression à la précédente, il viendra

$$\eta_{11}^i = H_1^i + H_2^i, \qquad \ldots \qquad \eta_{1k}^i = H_k^i + H_{k+1}^i, \qquad \ldots \qquad \eta_{1m^i}^i = H_{m^i}^i.$$

La résolution de ces équations donnera

$$H_{m^i}^i = \eta_{1m^i}^i, \qquad H_{m^i-1}^i = \eta_{1m^i-1}^i - \eta_{1m^i}^i, \qquad \ldots$$
$$H_1^i = \eta_{11}^i - \eta_{12}^i + \ldots + (-1)^{m^i-1}\eta_{1m^i}^i.$$

On voit que $B_{x,y}$ est une somme de formes partielles, $F_1, \ldots, F_i, \ldots$ contenant respectivement les variables qui correspondent à une même valeur de i, de même que S est un produit de substitutions partielles, $S_1, \ldots, S_i, \ldots$ altérant respectivement ces divers systèmes de variables.

Considérons séparément un de ces systèmes de variables. L'indice i

étant le même partout pourra être supprimé, et nous aurons

$$F = \sum_1^m x_k \eta_k,$$

$$S = \begin{vmatrix} x_1, \ldots, x_m & s_1 x_1, \ldots, s_1(x_m + x_{m-1}) \\ \eta_1 & \frac{1}{s_1}[\eta_1 - \eta_2 + \ldots + (-1)^{m-1}\eta_m] \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_k & \frac{1}{s_1}[\eta_k - \eta_{k+1} + \ldots + (-1)^{m-k}\eta_m] \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_m & \frac{1}{s_1}\eta_m \end{vmatrix}.$$

5. La substitution S a perdu la forme canonique, mais il est facile de la lui rendre par un nouveau changement de variables.

Posons, en effet,

$$\eta_k = (-1)^{k-1}\left[y_{m-k+1} + (m-k)y_{m-k} + \frac{(m-k)(m-k-1)}{1.2}y_{m-k-1} + \ldots\right].$$

La substitution S remplacera cette expression par

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s_1}(\eta_k - \eta_{k+1} + \eta_{k+2} - \ldots) \\ &= \frac{1}{s_1}\eta_k + \frac{(-1)^{k-1}}{s_1}\left\{ y_{m-k} + \begin{matrix} m-k-1 \\ +1 \end{matrix} \middle| y_{m-k-1} + \frac{(m-k-1)(m-k-2)}{1.2} \begin{matrix} \\ +m-k-2 \\ -1 \end{matrix} \middle| y_{m-k-2} + \ldots \right\} \\ &= \frac{1}{s_1}\eta_k + \frac{(-1)^{k-1}}{s_1}\left\{ y_{m-k} + (m-k)y_{m-k-1} + \frac{(m-k)(m-k-1)}{1.2}y_{m-k-2} + \ldots \right\}. \end{aligned}$$

Ce résultat est celui qu'on obtiendrait en augmentant $y_m, y_{m-1}, \ldots$ respectivement de $y_{m-1}, y_{m-2}, \ldots$.

Si donc on prend pour nouvelles variables les y, S reprendra sa forme canonique, et F prendra en même temps la forme suivante, où

ne figure plus rien d'indéterminé :

$$\begin{aligned} F = &+ x_1\left[y_m + (m-1)y_{m-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}y_{m-2} + \ldots\right] \\ &- x_2\left[y_{m-1} + (m-2)y_{m-2} + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}y_{m-3} + \ldots\right] \\ &+ x_3\left[y_{m-2} + (m-3)y_{m-3} + \ldots\right] + \ldots \end{aligned}$$

6. Passons au cas où l'équation caractéristique de S n'admet qu'une seule racine s_1 égale à $+1$ ou à -1.

Si cette racine était égale à -1, on aurait

$$S = TS',$$

T étant la substitution qui multiplie toutes les variables par -1, et S′ admettant $+1$ comme racine de son équation caractéristique. La substitution T transformant évidemment toute forme quadratique en elle-même, les formes F qui sont transformées en elles-mêmes par S le seront également par S′ et réciproquement. Nous pouvons donc supposer $s_1 = 1$.

7. La substitution S étant ramenée à sa forme canonique, soient

$$x'_1, \quad \ldots, \quad x'_{m'}; \quad \ldots; \quad x^i_1, \quad \ldots, \quad x^i_{m^i}; \qquad \ldots$$

les diverses séries entre lesquelles se répartissent les variables; et soit

$$F = \Sigma A^{ii'}_{kk'} x^i_k x^{i'}_k.$$

Sa transformée FS sera

$$\Sigma A^{ii'}_{kk'}(x^i_k + x^i_{k-1})(x^{i'}_{k'} + x^{i'}_{k'-1}),$$

pourvu qu'on supprime de cette expression les termes où figureraient des variables avec un indice inférieur nul. On aura donc

$$FS - S = \Sigma A^{ii'}_{kk'}(x^i_{k-1}x^{i'}_{k'} + x^i_k x^{i'}_{k'-1} + x^i_{k-1}x^{i'}_{k'-1}),$$

expression qui doit être identiquement nulle.

Considérons, parmi les termes de F pour lesquels i et i' ont des valeurs données, ceux dont le *rang* $k + k'$ a la plus grande valeur r; ils fourniront à la différence FS — S les termes de rang $r - 1$,

$$(1) \qquad \Sigma A^{ii'}_{kk'}(x^i_{k-1}x^{i'}_{k'} + x^i_k x^{i'}_{k'-1}).$$

Tous les autres termes de cette différence contenant d'autres variables, ou étant d'ordre moindre, ne pourront se réduire avec ceux-ci; ils doivent donc se détruire mutuellement.

Soit $A^{ii'}_{\rho,r-\rho}x^i_\rho x^{i'}_{r-\rho}$ celui des termes considérés où l'indice ρ de la première variable est minimum. Il fournira à l'expression (1) les deux termes

$$A^{ii'}_{\rho,r-\rho}(x^i_{\rho-1}x^{i'}_{r-\rho} + x^i_\rho x^{i'}_{r-\rho-1}),$$

dont le premier ne peut se réduire avec aucun autre; car il est évidemment le seul qui contienne une variable x^i affectée d'un indice $< \rho$; il doit donc disparaître de lui-même; donc son indice est nul, et l'on a nécessairement

$$\rho = 1.$$

Le terme considéré aura donc pour expression

$$A^{ii'}_{1,r-1}x^i_1 x^{i'}_{r-1}.$$

D'ailleurs, la série $x^{i'}_1, x^{i'}_2, \ldots$ contient, par hypothèse, $m^{i'}$ variables seulement. Pour que ce terme puisse exister, il faut donc qu'on ait

$$r \leqq 1 + m^{i'}.$$

Par un raisonnement semblable, on établira l'inégalité

$$r \leqq 1 + m^i.$$

Deux cas seront à distinguer ici, suivant que i' est différent de i ou égal à i.

8. *Premier cas : $i' \gtrless i$.* — Les termes considérés seront

$$A^{ii'}_{1,r-1}x^i_1 x^{i'}_{r-1} + A^{ii'}_{2,r-2}x^i_2 x^{i'}_{r-2} + \ldots + A^{ii'}_{r-1,1}x^i_{r-1}x^{i'}_1.$$

Les termes de rang $r-1$ qu'ils fournissent à $FS-S$ seront

$$(A^{ii}_{1,r-1}+A^{ii}_{2,r-2})x^i_1x^i_{r-2}+(A^{ii}_{2,r-2}+A^{ii}_{3,r-3})x^i_2x^i_{r-3}+\ldots,$$

et, comme ils doivent se détruire, on aura

$$A^{ii}_{1,r-1}+A^{ii}_{2,r-2}=0,\qquad A^{ii}_{2,r-2}+A^{ii}_{3,r-3}=0,\qquad \ldots.$$

Par suite de ces relations, l'ensemble des termes considérés sera de la forme

$$A^{ii}_{1,r-1}[x^i_1x^i_{r-1}-x^i_2x^i_{r-2}+x^i_3x^i_{r-3}-\ldots+(-1)^r x^i_{r-1}x^i_1].$$

9. *Second cas : $i'=i$.* — Dans ce cas, r sera nécessairement un nombre pair.

Supposons, en effet, qu'on eût $r=2p+1$. Les termes à considérer seraient

$$A^{ii}_{1,2p}x^i_1x^i_{2p}+A^{ii}_{2,2p-1}x^i_2x^i_{2p-1}+\ldots+A^{ii}_{p,p+1}x^i_px^i_{p+1}.$$

Ils fournissent à $FS-S$ les termes suivants d'ordre $r-1$,

$$(A^{ii}_{1,2p}+A^{ii}_{2,2p-1})x^i_1x^i_{2p-1}+\ldots+A^{ii}_{p,p+1}x^i_px^i_p,$$

qui ne peuvent disparaître que si tous les coefficients A sont nuls.

Soit donc $r=2p$. Les termes à considérer seront

$$A^{ii}_{1,2p-1}x^i_1x^i_{2p-1}+A^{ii}_{2,2p-2}x^i_2x^i_{2p-2}+\ldots+A^{ii}_{pp}x^i_px^i_p,$$

et fournissent à $FS-S$ les termes d'ordre $r-1$,

$$(A^{ii}_{1,2p-1}+A^{ii}_{2,2p-2})x^i_1x^i_{2p-2}+\ldots+(A^{ii}_{p-1,p+1}+2A^{ii}_{pp})x^i_{p-1}x^i_p.$$

Pour qu'ils s'annulent, on doit avoir

$$A^{ii}_{1,2p-1}=-A^{ii}_{2,2p-2}=\ldots=(-1)^{p-1}2A^{ii}_{pp},$$

ce qui réduit les termes considérés à la forme

$$A^{ii}_{pp}[x^i_px^i_p-2x^i_{p-1}x^i_{p+1}+\ldots+(-1)^{p-1}2x^i_1x^i_{2p-1}].$$

Nous obtenons donc le résultat suivant :

Si, pour un système de valeurs déterminées de i, i', on considère les termes $A^{ii'}_{kk'} x^i_k x^{i'}_{k'}$ de rang le plus élevé qui sont contenus dans F, *leur rang r ne pourra surpasser la plus petite des deux quantités $1 + m^i$, $1 + m^{i'}$.*

Si $i \gtrless i'$, l'ensemble de ces termes sera de la forme

$$A^{ii'}_{1,r-1}[x^i_1 x^{i'}_{r-1} - x^i_2 x^{i'}_{r-2} + \ldots + (-1)^r x^i_{r-1} x^{i'}_1].$$

Si $i = i'$, r sera un nombre pair $2p$, et l'ensemble de ces termes sera

$$A^{ii}_{pp}[x^i_p x^i_p - 2x^i_{p-1} x^i_{p+1} + \ldots + (-1)^{p-1} 2x^i_1 x^i_{2p-1}].$$

10. Cela posé, les quantités $m', \ldots, m^i, \ldots$ étant supposées rangées par ordre de grandeur décroissante, admettons que $m', \ldots, m^q$ aient une même valeur m, mais que $m^{q+1}, \ldots$ soient $< m$. D'après ce qui précède, aucun terme de F ne peut être de rang supérieur à $1 + m$. Mais, d'autre part, il existe effectivement des termes de ce rang : car les q premières séries contiennent des variables d'indice m qui figurent nécessairement dans F; les termes qui les contiennent renferment une seconde variable, dont l'indice est au moins égal à l'unité; leur rang ne peut donc être inférieur à $1 + m$.

Il résulte d'ailleurs de ce qui précède que ces termes ne peuvent contenir que les variables des q séries à m variables et que leur ensemble est donné, si m est pair, par une expression telle que

$$(2) \qquad \sum_{i,i'} A^{ii'}_{1m}[x^i_1 x^{i'}_m - x^i_2 x^{i'}_{m-1} + \ldots + (-1)^{m-1} x^i_m x^{i'}_1].$$

$$i = 1, 2, \ldots, q, \qquad i' = 1, 2, \ldots, q, \qquad i' \gtrless i$$

et, si m est impair $= 2p - 1$, par l'expression

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i,i'} A^{ii'}_{1,2p-1}[x^i_1 x^{i'}_{2p-1} - x^i_2 x^{i'}_{2p-2} + \ldots] \\ &+ \sum_i A^{ii}_{pp}[x^i_p x^i_p - 2x^i_{p-1} x^i_{p+1} + \ldots + (-1)^{p-1} x^i_1 x^i_{2p-1}]. \end{aligned} \right.$$

Il est maintenant aisé de simplifier l'expression de la forme F, par des substitutions qui conservent à S sa forme canonique et qui ont été indiquées plus haut. Ici encore nous aurons à distinguer les deux cas de m pair ou impair.

11. 1° Soit m pair. Soit x'_m une quelconque des variables d'indice m. Les termes de F qui la renferment, étant de rang $1+m$, sont contenus dans l'expression (2) et leur ensemble sera de la forme

$$x'_m(A''x''_1+\ldots+A^i x^i_1+\ldots).$$

L'un au moins des coefficients $A'', \ldots, A^i, \ldots$, par exemple A'', sera $\geqq 0$; et, comme on peut, sans altérer S, remplacer $x''_1, \ldots, x''_m$ par $\frac{1}{A''}x''_1, \ldots, \frac{1}{A''}x''_m$, il est permis de le supposer égal à l'unité.

La forme F, contenant le terme $x''_1 x'_m$, contiendra parmi ses termes d'ordre $m+1$ les suivants

$$(4) \qquad x''_1 x'_m - x''_2 x'_{m-1} + \ldots + (-1)^{m-1} x''_m x'_1.$$

Cela posé, nous allons montrer qu'on peut, sans altérer S, faire disparaître de F tous ceux de ses termes qui contiennent une des variables $x'_1, \ldots, x'_m$; $x''_1, \ldots, x''_m$ sans être bilinéaires par rapport à ces deux séries de variables.

Soit d'abord $x^i_1, \ldots, x^i_k, \ldots$ une autre série de variables, distincte des deux précédentes; s'il existe des termes bilinéaires par rapport aux deux séries x'' et x^i, considérons ceux d'entre eux dont le rang r est le plus élevé; il seront de la forme

$$B(x''_1 x^i_{r-1} - x''_2 x^i_{r-2} + \ldots).$$

Changeons

$$x'_m, \quad x'_{m-1}, \quad \ldots, \quad x'_{m-r+2}$$

en

$$x'_m - Bx^i_{r-1}, \quad x'_{m-1} - Bx^i_{r-2}, \quad \ldots, \quad x'_{m-r+2} - Bx^i_1.$$

L'accroissement subi par les termes (4) par suite de cette substitution détruira ces termes de rang r; et les autres termes bilinéaires

en $x''_1, \ldots, x''_m$ et $x^i_1, \ldots,$ que cette même substitution pourra introduire seront évidemment de rang $< r$. Cette opération aura donc pour effet de diminuer r. Par une série d'abaissements de ce genre, on finira par faire disparaître complètement les termes bilinéaires par rapport aux séries x'' et x^i.

En second lieu, s'il existe des termes quadratiques par rapport aux variables x'', considérons ceux dont le rang est le plus élevé. Ce rang sera un nombre pair $2p$, et ces termes seront de la forme

$$B(x''^2_p - 2x''_{p-1}x''_{p+1} + \ldots + (-1)^{p-1}2x''_1x''_{2p-1}).$$

Changeons

$$x'_m, \quad \ldots, \quad x'_{m-2p+2}$$

en

$$x'_m + (-1)^p B x''_{2p-1}, \quad \ldots, \quad x'_{m-2p+2} + (-1)^p B x''_1.$$

L'accroissement des termes (4) détruira les termes de rang $2p$, et les autres termes quadratiques par rapport aux x'' qui pourront être introduits seront de rang $< 2p$. Par une suite d'opérations analogues, on pourra faire disparaître complètement ces termes quadratiques.

On fera disparaître par un procédé tout semblable les termes bilinéaires par rapport aux x' et aux x^i, ou quadratiques par rapport aux x'.

On ramènera donc finalement F à la forme

$$F = B_{x'x''} + \Phi,$$

$B_{x'x''}$ étant bilinéaire par rapport aux x' et aux x'' et Φ ne contenant plus ces variables.

La forme bilinéaire $B_{x'x''}$ pourra être traitée par le procédé employé dans le cas où s_1^2 était $\gtrless 1$ (nos 4 et 5) et ramenée à une forme canonique complètement déterminée.

Quant à la forme Φ, si elle contient encore des séries de m variables, on pourra en extraire une seconde forme bilinéaire, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à une forme Ψ ne contenant plus que des séries de moins de m variables, et à laquelle on appliquera les mêmes procédés de traitement qu'à la forme primitive F.

12. 2° Soit m impair $= 2p - 1$. Les termes de rang $m + 1$ seront donnés par la formule (3). Considérons ceux de ces termes qui ne contiennent que les variables d'indice p. Ils constituent une forme quadratique

$$(5) \qquad (-1)^{p-1} \sum_{i,i'} A^{ii'}_{pp} x^i_p x^{i'}_p + \sum_i A^{ii}_{pp} x^i_p x^i_p,$$

qu'on peut réduire à une somme de carrés par une substitution de la forme

$$\begin{array}{ll} x'_p & \alpha_{11} x'_p + \alpha_{12} x''_p + \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^i_p & \alpha_{i1} x'_p + \alpha_{i2} x''_p + \ldots, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Cela posé, la substitution

$$\left.\begin{array}{ll} x'_k & \alpha_{11} x'_k + \alpha_{12} x''_k + \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^i_k & \alpha_{i1} x'_k + \alpha_{i2} x''_k + \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (k = 1, \ldots, 2p - 1),$$

qui n'altère pas S, ramènera (5) à une somme de carrés. Les rectangles $x^i_p x^{i'}_p$ ayant ainsi disparu de l'expression (3), elle se réduira à sa seconde partie, où les coefficients A^{ii}_{pp} seront d'ailleurs égaux à 1. Elle deviendra donc

$$\sum [x^i_p x^i_p - 2 x^i_{p-1} x^i_{p+1} + \ldots + (-1)^{p-1} 2 x^i_1 x^i_{2p-1}].$$

Nous allons montrer qu'on peut encore transformer F, de telle sorte qu'elle ne contienne plus que des termes quadratiques par rapport aux variables de l'une des séries x^i qui figurent dans l'expression précédente.

Supposons en effet que F contienne des termes bilinéaires par rapport aux deux séries x^i, $x^{i'}$. Considérons ceux de ces termes dont le rang r est maximum; ils sont de la forme

$$A(x^i_1 x^{i'}_{r-1} - x^i_2 x^{i'}_{r-2} + \ldots).$$

En changeant

$$x^i_{2p-1}, \quad \ldots, \quad x^i_{2p-r-1}$$

en

$$x^i_{2p-1} + (-1)^p \frac{\Lambda}{2} x^i_{r-1}, \quad \ldots, \quad x^i_{2p-r+1} + (-1)^p \frac{\Lambda}{2} x^i_1,$$

on les fera disparaître, et l'on n'introduira en fait de termes analogues que des termes de rang moindre. En répétant cette opération, on arrivera à la destruction complète de ces termes.

On aura donc

$$F = f + \Phi,$$

f étant une fonction quadratique des x^i et Φ ne contenant plus cette série de variables.

Il ne nous reste évidemment qu'à achever la réduction de la forme f, la forme Φ pouvant ensuite être traitée comme l'a été la forme F.

15. Soit, en supprimant l'indice i désormais inutile,

$$\begin{aligned} f = {} & x_p^2 - 2x_{p-1}x_{p+1} + \ldots \\ & + (-1)^{p-1} 2x_1 x_{2p-1} + \sum A_{kk'} x_k x_{k'} \qquad (k + k') < 2p, \quad k' \leqq k). \end{aligned}$$

On pourra faire disparaître les termes qui contiennent les carrés des variables $x_{p-1}, \ldots, x_1$.

Supposons, en effet, qu'après s'être déjà débarrassé des carrés de $x_{p-1}, \ldots, x_{p-k+1}$, on cherche à faire disparaître le terme $A_{p-k,p-k} x^2_{p-k}$ sans réintroduire les termes déjà supprimés.

On y parviendra en opérant la substitution suivante

$$\begin{aligned} x_{2p-1} \quad & x_{2p-1} - \frac{(-1)^k}{2} A_{p-k,p-k} x_{2p-1-2k}, \\ \ldots\ldots \quad & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{p+k} \quad & x_{p+k} - \frac{(-1)^k}{2} A_{p-k,p-k} x_{p-k}, \\ \ldots\ldots \quad & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{2k+1} \quad & x_{2k+1} - \frac{(-1)^k}{2} A_{p-k,p-k} x_1. \end{aligned}$$

Lorsque ces carrés auront ainsi disparu, la forme f ne pourra plus con-

tenir aucun terme où les indices k et k' soient tous deux $< p$. En effet, s'il existait des termes de ce genre, soit $A_{kk'}x_k x_{k'}$ l'un d'eux, choisi de telle sorte que $k' - k$ soit minimum.

Les termes qui contiennent les carrés des variables d'indice $< p$ ayant été supprimés, $k' - k$ ne pourra être nul, et, comme $k' < p$, k sera $< p - 1$. Cela posé, la substitution S opérée sur f accroîtra le terme considéré de trois autres

$$A_{kk'}(x_{k'}x_{k'-1} + x_{k-1}x_{k'} + x_{k-1}x_{k'-1}).$$

Le premier de ces termes ne peut disparaître; car les seuls termes de f d'où pourrait résulter un terme qui se réduise avec celui-là seraient les termes en $x_{k-1}x_{k'-1}$ ou en $x_{k+1}x_{k'}$. Le second de ces termes ne peut exister, par hypothèse, car les indices y sont $< p$ et leur différence est moindre que $k' - k$. La même observation s'applique au premier, sauf le cas où $k' - k = 1$; mais alors il se confond avec le terme primitif en $x_k x_{k'}$.

14. Il résulte de ce qui précède qu'on pourra mettre f sous la forme

$$f = \sum_{\mu,\mu'} (-1)^{\mu+\mu'} a_{\mu\mu'} x_{p+\mu} x_{p-\mu-\mu'},$$

les indices de sommation μ, μ' variant respectivement de 0 à $p - 1$ et de 0 à $p - \mu - 1$, et les $a_{\mu\mu'}$ étant des coefficients à déterminer.

D'après ce que nous connaissons déjà sur la forme des termes de rang maximum, on a

$$a_{00} = 1, \qquad a_{10} = a_{20} = \ldots = 2.$$

D'ailleurs f doit être transformée en elle-même par S; et cette condition va nous permettre de calculer de proche en proche les autres coefficients a.

En effet, remplaçant généralement x_k par $x_k + x_{k-1}$, $fS - S$ sera une somme de termes, dont chacun contient une variable affectée d'un indice au moins égal à $p - 1$ et a un rang au plus égal à $2p - 1$.

D'ailleurs les termes de rang $2p-1$ se détruisent mutuellement, car c'est par cette condition que nous avons déterminé les coefficients $a_{00}, \ldots, a_{\mu 0}, \ldots$.

Le terme général de $fS - S$ sera donc de la forme

$$B_{kk'} x_{p-1+k} x_{p-k-k'},$$

k étant $\geqq 0$ et $k' > 0$.

Il existe en général dans S trois termes qui peuvent concourir à le produire; ce sont les suivants

$$(-1)^{k+k'} a_{kk'} x_{p+k} x_{p-k-k'},$$
$$(-1)^{k+k'-1} a_{k-1,k'} x_{p-1+k} x_{p-k-k'+1},$$
$$(-1)^{k+k'-1} a_{k,k'-1} x_{p+k} x_{p-k-k'+1}$$

et l'on aura

$$B_{kk'} = (-1)^{k+k'} (a_{kk'} - a_{k-1,k'} - a_{k,k'-1}).$$

Mais $B_{kk'}$ doit être nul; on a donc la formule récurrente

$$a_{kk'} = a_{k-1,k'} + a_{k,k'-1}.$$

Remarquons toutefois que, si $k = 0$, il n'existe pas dans S de terme affecté du coefficient $a_{k-1,k'}$; alors la formule se réduit à la forme plus simple

$$a_{0k'} = a_{0,k'-1}.$$

Posons dans ces formules $k = 0, 1, \ldots, \mu$ et ajoutons; il viendra

$$a_{\mu k'} = \sum_0^{\mu} a_{k,k'-1}.$$

Soit d'abord $k' = 1$; on aura, d'après la valeur connue des coefficients a_{k0},

$$a_{\mu 1} = 2\mu + 1.$$

Faisant ensuite $k' = 2$, il viendra

$$a_{\mu 2} = \sum_0^{\mu} (2k+1) = 2\frac{\mu(\mu+1)}{2} + \mu + 1.$$

On trouvera ensuite

$$a_{\mu 3} = \sum_{0}^{\mu} \left[2\,\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \right] = 2\,\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{2.3} + \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}$$

et enfin, généralement,

$$\begin{aligned} a_{\mu\mu'} &= 2\,\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\mu'-1)}{1.2\ldots\mu'} + \frac{(\mu+1)\ldots(\mu+\mu'-1)}{1.2\ldots(\mu'-1)} \\ &= (2\mu+\mu')\,\frac{(\mu+1)\ldots(\mu+\mu'-1)}{1.2\ldots\mu'}. \end{aligned}$$

15. L'expression que nous venons de trouver pour la forme f peut être simplifiée, si l'on consent à faire perdre à la substitution S sa forme canonique.

On a, en effet, en réunissant ensemble les termes de f qui contiennent chacune des quantités $x_1, \ldots, x_{p-1}$,

$$f = x_1\eta_1 + \ldots + x_{p-1}\eta_{p-1} + x_p^2,$$

$\eta_1, \ldots, \eta_{p-1}$ étant des fonctions de $x_{2p-1}, \ldots, x_{p+1}, x_p$, linéairement indépendantes par rapport à $x_{2p-1}, \ldots, x_{p+1}$.

La substitution S les remplacera par des fonctions $H_1, \ldots, H_{p-1}$ de $x_{2p-1}, \ldots, x_p, x_{p-1}$, qu'on peut exprimer au moyen de $\eta_1, \ldots, \eta_{p-1}$, x_p, x_{p-1}.

Prenons les η pour variables indépendantes à la place de $x_{2p-1}, \ldots, x_{p+1}$; f aura pour expression

$$x_1\eta_1 + \ldots + x_{p-1}\eta_{p-1} + x_p^2$$

et S prendra la forme

$$S = \begin{vmatrix} x_1, \ldots, x_p & x_1, \ldots, x_p + x_{p-1} \\ \eta_1, \ldots, \eta_{p-1} & H_1, \ldots, H_{p-1} \end{vmatrix}.$$

Il reste à déterminer les fonctions inconnues H par la condition

$$fS = f,$$

qui donne

$$x_1 H_1 + (x_2 + x_1) H_2 + \ldots + (x_{p-1} + x_{p-2}) H_{p-1} + (x_p + x_{p-1})^2$$
$$= x_1 \eta_1 + \ldots + x_{p-1} \eta_{p-1} + x_p^2.$$

L'identification des termes en $x_1, \ldots, x_{p-2}$ donnera

$$\eta_1 = H_1 + H_2, \qquad \ldots, \qquad \eta_{p-2} = H_{p-2} + H_{p-1}$$

et celle des termes restants donnera ensuite

$$\eta_{p-1} = H_{p-1} + x_{p-1} + 2x_p.$$

La résolution de ces équations donnera

$$H_k = \eta_k - \eta_{k+1} + \ldots + (-1)^{p-1-k} (\eta_{p-1} - x_{p-1} - 2x_p).$$

16. Nous obtenons, comme conclusion de cette analyse, la proposition suivante :

Pour qu'une substitution S *puisse transformer en elle-même une forme quadratique de déterminant* $\gtrless 0$, *il faut et il suffit qu'on puisse, par un choix convenable des variables indépendantes, la mettre sous la forme*

$$S = S' S'' \ldots,$$

les substitutions partielles $S', S'', \ldots$ *altérant chacune des variables distinctes et ayant l'une des deux expressions suivantes :*

$$\text{(I)} \qquad \left| \begin{matrix} x_1, \ldots, x_m & s x_1, \ldots, s(x_m + x_{m-1}) \\ y_1, \ldots, y_m & \frac{1}{s} y_1, \ldots, \frac{1}{s}(y_m + y_{m-1}) \end{matrix} \right|$$

(*le nombre* m *étant assujetti à être pair si* $s = \pm 1$).

$$\text{(II)} \qquad | z_1, \ldots, z_{2p-1} \quad t z_1, \ldots, t z_{2p-1} |, \qquad (t = \pm 1).$$

Ces conditions étant supposées satisfaites, toute forme quadra-

tique F *de déterminant différent de zéro et que* S *transforme en elle-même pourra, par un changement de variables qui n'altère pas l'expression déjà donnée à* S, *être ramenée à la forme*

$$F = F' + F'' + \ldots,$$

F', F'', ... *étant des formes quadratiques partielles, contenant respectivement les mêmes variables que les substitutions* S', S'', ...

Si l'une de ces substitutions, telle que S', *est de forme* (I), F' *aura pour expression*

$$\begin{aligned} & x_1\left[y_m + (m-1)y_{m-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}y_{m-2} + \ldots\right] \\ & - x_2\left[y_{m-1} + (m-2)y_{m-2} + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}y_{m-3} + \ldots\right] \\ & + x_3\left[y_{m-2} + (m-3)y_{m-3} + \ldots\right] + \ldots + (-1)^{m-1}x_m y_1. \end{aligned}$$

Si, au contraire, S' *est de la forme* (II), F' *aura pour expression*

$$\begin{aligned} & z_p^2 - 2z_{p+1}z_{p-1} + 2z_{p+2}z_{p-2} - \ldots + (-1)^{p-1}2z_{2p-1}z_1 \\ & + \sum_{\mu,\mu'}(-1)^{\mu+\mu'}(2\mu+\mu')\frac{\mu+\mu'-1!}{\mu!\,\mu'!}z_{p+\mu}z_{p-\mu-\mu'}, \end{aligned}$$

où μ *varie de* 0 *à* $p-1$, *et* μ' *de* 1 *à* $p-1-\mu$.

Sur un théorème d'Électrodynamique;

PAR M. P. DUHEM.

Ampère a montré que toutes les actions mutuelles des courants électriques uniformes pouvaient être embrassées par une loi unique donnant l'expression de l'action qu'un élément de courant uniforme exerce sur un autre élément de courant uniforme; cette force, d'après la loi proposée par Ampère, est dirigée suivant la droite qui joint les deux éléments; de plus, elle vérifie la règle de l'égalité entre l'action et la réaction.

Les expériences ne peuvent faire connaître l'action mutuelle de deux éléments de courant, mais seulement l'action d'un courant tout entier sur un élément de courant. Il en résulte que toute loi élémentaire qui conduit à la même expression que la loi d'Ampère pour l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément de courant uniforme peut être substituée à la loi d'Ampère. C'est ainsi que Grassmann a proposé une loi élémentaire susceptible de remplacer celle d'Ampère.

Si l'on suppose donnée l'action qu'un courant fermé et uniforme exerce sur un élément de courant uniforme, l'action élémentaire est susceptible d'une infinité d'expressions différentes. Mais, parmi cette infinité de lois élémentaires, une au plus est compatible avec la règle de l'égalité entre l'action et la réaction. Par conséquent, il est impossible de trouver une loi différente de la loi d'Ampère qui soit compatible avec cette règle, et qui conduise aux mêmes conséquences que la loi d'Ampère pour l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément

de courant. C'est à Gauss [1] qu'est dû ce théorème, dont on a donné depuis plusieurs démonstrations.

Nous nous proposons de résoudre une question plus générale que celle que Gauss a résolue par le théorème précédent; cette question est la suivante :

Si l'on connaît l'action qu'un courant fermé et uniforme exerce sur un élément de courant uniforme, et si, de plus, on assujettit la loi élémentaire à satisfaire à la condition que le travail produit dans le déplacement de deux éléments de courant par les actions mutuelles de ces deux éléments dépende uniquement du changement de position relative des deux éléments, la loi élémentaire est-elle complètement déterminée?

Nous allons démontrer, en réponse à cette question, qu'*il existe au plus une loi élémentaire compatible avec les conditions imposées.*

1. Imaginons une première loi élémentaire, d'après laquelle l'action qu'un élément de conducteur de longueur ds', traversé par un courant d'intensité $\mathfrak{I}'$, exerce sur un élément de conducteur de longueur ds, traversé par un courant d'intensité $\mathfrak{I}$, se compose d'une force, appliquée au milieu de l'élément ds, ayant pour composante

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{I}\mathfrak{I}'\mathfrak{X}\,ds\,ds', \\ \mathfrak{I}\mathfrak{I}'\mathfrak{Y}\,ds\,ds', \\ \mathfrak{I}\mathfrak{I}'\mathfrak{Z}\,ds\,ds', \end{cases}$$

et peut-être aussi (comme il arrive dans la loi de M. H. von Helmholtz) d'un couple dont l'axe ait pour projections

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{I}\mathfrak{I}'\mathfrak{L}\,ds\,ds', \\ \mathfrak{I}\mathfrak{I}'\mathfrak{M}\,ds\,ds', \\ \mathfrak{I}\mathfrak{I}'\mathfrak{N}\,ds\,ds'. \end{cases}$$

[1] Gauss, *Werke*, Bd. V, p. 628.

Imaginons ensuite une seconde loi élémentaire dans laquelle les mêmes grandeurs aient pour valeurs

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{ss}'\mathfrak{X}_1\, ds\, ds', \\ \mathfrak{ss}'\mathfrak{Y}_1\, ds\, ds', \\ \mathfrak{ss}'\mathfrak{Z}_1\, ds\, ds'; \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{ss}'\mathfrak{L}_1\, ds\, ds', \\ \mathfrak{ss}'\mathfrak{M}_1\, ds\, ds', \\ \mathfrak{ss}'\mathfrak{N}_1\, ds\, ds'. \end{cases}$$

La loi représentée par les expressions (1) et (2) est supposée conduire aux mêmes conséquences que la loi représentée par les expressions (3) et (4) lorsqu'on calcule l'action qu'un conducteur fermé quelconque, auquel l'élément ds' est supposé appartenir, traversé par un courant uniforme d'intensité $\mathfrak{s}'$, exerce sur un élément de conducteur ds, traversé par un courant d'intensité $\mathfrak{s}$. Cette première condition s'exprime par les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\mathfrak{ss}'\, ds \int \mathfrak{X}\, ds' &= \mathfrak{ss}'\, ds \int \mathfrak{X}_1\, ds', \\
\mathfrak{ss}'\, ds \int \mathfrak{Y}\, ds' &= \mathfrak{ss}'\, ds \int \mathfrak{Y}_1\, ds', \\
\mathfrak{ss}'\, ds \int \mathfrak{Z}\, ds' &= \mathfrak{ss}'\, ds \int \mathfrak{Z}_1\, ds', \\
\mathfrak{ss}'\, ds \int \mathfrak{L}\, ds' &= \mathfrak{ss}'\, ds \int \mathfrak{L}_1\, ds', \\
\mathfrak{ss}'\, ds \int \mathfrak{M}\, ds' &= \mathfrak{ss}'\, ds \int \mathfrak{M}_1\, ds', \\
\mathfrak{ss}'\, ds \int \mathfrak{N}\, ds' &= \mathfrak{ss}'\, ds \int \mathfrak{N}_1\, ds',
\end{aligned}$$

l'élément ds ayant une position et une orientation quelconques, et les intégrales s'étendant à un contour fermé quelconque.

Il en résulte que, si l'on pose

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}, & \mathrm{L} = \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}, \\ \mathrm{Y} = \mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}, & \mathrm{M} = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}, \\ \mathrm{Z} = \mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}, & \mathrm{N} = \mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}, \end{cases}$$

on aura

$$\int X\,ds' = 0, \qquad \int L\,ds' = 0,$$
$$\int Y\,ds' = 0, \qquad \int M\,ds' = 0,$$
$$\int Z\,ds' = 0, \qquad \int N\,ds' = 0,$$

quelles que soient la position et l'orientation de l'élément ds, quelle que soit la position du circuit fermé dont fait partie l'élément ds', et quelle que soit sa forme, *anguleuse ou non*. Ces égalités équivalent aux suivantes

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
X &= \frac{\partial}{\partial s'}\,\Phi\left(x', y', z', x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right),\\
Y &= \frac{\partial}{\partial s'}\,\Theta\left(x', y', z', x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right),\\
Z &= \frac{\partial}{\partial s'}\,\Psi\left(x', y', z', x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right),\\
L &= \frac{\partial}{\partial s'}\,\Lambda\left(x', y', z', x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right),\\
M &= \frac{\partial}{\partial s'}\,\Pi\left(x', y', z', x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right),\\
N &= \frac{\partial}{\partial s'}\,\Sigma\left(x', y', z', x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right),
\end{aligned}\right.$$

x, y, z étant les coordonnées d'un point de ds et x', y', z' les coordonnées d'un point de ds'.

Ces égalités expriment simplement que la loi élémentaire représentée par les expressions (1) et (2) conduit aux mêmes conséquences que la loi élémentaire représentée par les expressions (3) et (4) pour l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément de courant uniforme.

2. Introduisons maintenant l'hypothèse que, dans chacune des deux lois élémentaires proposées, le travail produit pendant un déplacement quelconque des deux éléments ds et ds' par les actions mutuelles des deux éléments ds et ds' dépend uniquement du changement de position mutuelle des deux éléments ds et ds'.

Dans la première loi, l'action de l'élément ds sur l'élément ds' se

compose d'une force, appliquée à l'élément ds', ayant pour composantes

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{X}'\,ds\,ds', \quad \mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{Y}'\,ds\,ds', \quad \mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{Z}'\,ds\,ds'$$

et d'un couple dont l'axe a pour projections

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{L}'\,ds\,ds', \quad \mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{M}'\,ds\,ds', \quad \mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{N}'\,ds\,ds'.$$

Dans un déplacement élémentaire de l'élément ds, les coordonnées du milieu de cet élément varient de δx, δy, δz. Cet élément subit autour d'un axe passant par son centre une rotation dont les composantes sont $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$. De même, dans un déplacement élémentaire de l'élément ds', les coordonnées du milieu de cet élément varient de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$. Cet élément subit autour d'un axe passant par son centre une rotation dont les composantes sont $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, $\delta\gamma'$. Le travail effectué a pour valeur

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'(&\mathfrak{X}\,\delta x + \mathfrak{Y}\,\delta y + \mathfrak{Z}\,\delta z + \mathfrak{L}\,\delta\alpha + \mathfrak{M}\,\delta\beta + \mathfrak{N}\,\delta\gamma \\ &+ \mathfrak{X}'\,\delta x' + \mathfrak{Y}'\,\delta y' + \mathfrak{Z}'\,\delta z' + \mathfrak{L}'\,\delta\alpha' + \mathfrak{M}'\,\delta\beta' + \mathfrak{N}'\,\delta\gamma')\,ds\,ds'.\end{aligned}$$

Cette quantité doit pouvoir se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\xi(\delta x' - \delta x) + \eta(\delta y' - \delta y) + \zeta(\delta z' - \delta z) \\ + \lambda(\delta\alpha' - \delta\alpha) + \mu(\delta\beta' - \delta\beta) + \gamma(\delta\gamma' - \delta\gamma),\end{aligned}$$

quels que soient

$$\begin{aligned}&\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z, \quad \delta x', \quad \delta y', \quad \delta z', \\ &\delta\alpha, \quad \delta\beta, \quad \delta\gamma, \quad \delta\alpha', \quad \delta\beta', \quad \delta\gamma'.\end{aligned}$$

Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} + \mathfrak{X}' &= 0, & \mathfrak{L} + \mathfrak{L}' &= 0, \\ \mathfrak{Y} + \mathfrak{Y}' &= 0, & \mathfrak{M} + \mathfrak{M}' &= 0, \\ \mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}' &= 0, & \mathfrak{N} + \mathfrak{N}' &= 0.\end{aligned}$$

La seconde loi élémentaire doit donner lieu à six égalités analogues.

Il en résulte que, si l'on désigne par

$$X', \quad Y', \quad Z', \quad L', \quad M', \quad N',$$

ce que deviennent

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad L, \quad M, \quad N,$$

lorsqu'on y remplace les lettres

$$x, \quad y, \quad z, \quad x', \quad y', \quad z', \quad s, \quad s'$$

respectivement par les lettres

$$x', \quad y', \quad z', \quad x, \quad y, \quad z, \quad s', \quad s,$$

on doit avoir

$$(7) \qquad \begin{cases} X + X' = 0, & L + L' = 0, \\ Y + Y' = 0, & M + M' = 0, \\ Z + Z' = 0, & N + N' = 0. \end{cases}$$

Désignons par Φ' ce que devient la fonction Φ lorsqu'on y permute les lettres

$$x, \quad y, \quad z, \quad s$$

avec les lettres

$$x', \quad y', \quad z', \quad s';$$

la première des égalités (7) pourra, en vertu de la première des égalités (6), s'écrire

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \frac{\partial \Phi'}{\partial s} = 0,$$

ou bien

$$\varphi_1 \frac{dx'}{ds'} + \varphi_2 \frac{dy'}{ds'} + \varphi_3 \frac{dz'}{ds'} + \varphi'_1 \frac{dx}{ds} + \varphi'_2 \frac{dy}{ds} + \varphi'_3 \frac{dz}{ds} = 0.$$

en posant

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x'} = \varphi_1, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial y'} = \varphi_2, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial z'} = \varphi_3, \\ \dfrac{\partial \Phi'}{\partial x} = \varphi'_1, & \dfrac{\partial \Phi'}{\partial y} = \varphi'_2, & \dfrac{\partial \Phi'}{\partial z} = \varphi'_3. \end{cases}$$

Cette égalité doit avoir lieu quelle que soit la position du point (x', y', z') sur le circuit fermé dont fait partie l'élément ds'. On aura donc une nouvelle identité en différentiant celle-là par rapport à s' :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial x'}\left(\frac{dx'}{ds'}\right)^2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y'}\left(\frac{dy'}{ds'}\right)^2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z'}\left(\frac{dz'}{ds'}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z'} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y'}\right)\frac{dy'}{ds'}\frac{dz'}{ds'} + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z'}\right)\frac{dz'}{ds'}\frac{dx'}{ds'} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x'}\right)\frac{dx'}{ds'}\frac{dy'}{ds'} \\ &\quad = -\left[\frac{\partial \varphi'_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi'_2}{\partial s'}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi'_3}{\partial s'}\frac{dz}{ds}\right]. \end{aligned}\right.$$

Dans cette identité,

$$x,\quad y,\quad z,\quad x',\quad y',\quad z'$$

sont six variables indépendantes;

$$\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds},\quad \frac{dz}{ds},\quad \frac{dx'}{ds'},\quad \frac{dy'}{ds'},\quad \frac{dz'}{ds'}$$

sont six autres variables liées par les relations

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \\ &\left(\frac{dx'}{ds'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{ds'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{ds'}\right)^2 = 1. \end{aligned}\right.$$

Φ ne dépend pas de $\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}$; Φ' ne dépend donc pas de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$; il en est de même de ses dérivées partielles par rapport à x, y, z, c'est-à-dire de $\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3$, et aussi de $\frac{\partial \varphi'_1}{\partial s'}, \frac{\partial \varphi'_2}{\partial s}, \frac{\partial \varphi'_3}{\partial s'}$. Par conséquent, le second membre de l'identité (9) est une fonction linéaire et homogène de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. Il doit en être de même du premier, quelles que soient les valeurs que puissent prendre $x, y, z, x', y', z', \frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}$.

Laissant à x, y, z, x', y', z' des valeurs quelconques, faisons

$$\frac{dx'}{ds'} = 1, \qquad \frac{dy'}{ds'} = 0, \qquad \frac{dz'}{ds'} = 0.$$

Le premier membre de l'identité (9) se réduit à $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x'}$. Donc, pour ces valeurs particulières de $\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x'}$ se réduit à une fonction linéaire et homogène de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. Mais Φ, par conséquent φ_1, et par conséquent aussi $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x'}$, ne dépendent pas de $\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}$. On voit donc que $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x'}$ est, en toutes circonstances, une fonction linéaire et homogène de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. On démontrerait d'une manière analogue que $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y'}$ et $\frac{\partial \varphi_3}{\partial z'}$ sont des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

Ces résultats étant obtenus, l'identité (9) montre que

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z'} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y'}\right)\frac{dy'}{ds'}\frac{dz'}{ds'} + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z'}\right)\frac{dz'}{ds'}\frac{dx'}{ds'} + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x'}\right)\frac{dx'}{ds'}\frac{dy'}{ds'}$$

est, en toutes circonstances, une fonction linéaire et homogène de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. En faisant alors successivement $\frac{dx'}{ds'} = 0$, $\frac{dy'}{ds'} = 0$, $\frac{dz'}{ds'} = 0$, et en raisonnant comme nous venons de le faire, on verra sans peine que

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z'} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y'},$$
$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z'},$$
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z'}$$

sont des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

Mais, d'autre part, d'après la définition des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$,

donnée par les égalités (8), on a

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z'} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial y'},$$
$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x'} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z'},$$
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y'} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x'}.$$

On voit donc que les six quantités

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y'},\quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z'},\quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x'},\quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z'},\quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial z'},\quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial y'}$$

sont, comme

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x'},\quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y'},\quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial z'},$$

des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; ce qui, en se reportant aux égalités (8), peut s'énoncer ainsi : Toutes les dérivées partielles du second ordre de Φ, envisagé comme fonction de x', y', z', sont des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$.

En conséquence, la fonction Φ peut s'exprimer de la manière suivante

$$(11)\qquad \Phi = \lambda_1 \frac{dx}{ds} + \lambda_2 \frac{dy}{ds} + \lambda_3 \frac{dz}{ds} + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' + \alpha_4,$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant des fonctions des variables x, y, z, x', y', z', et α_1, α_2, α_3, α_4 des fonctions des variables x, y, z, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$.

En vertu de cette expression (11) de la fonction Φ et de la première des égalités (6), nous aurons

$$(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} X = \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial s'}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial s'}\frac{dz}{ds} \\ + \alpha_1 \frac{dx'}{ds'} + \alpha_2 \frac{dy'}{ds'} + \alpha_3 \frac{dz'}{ds'}. \end{aligned} \right.$$

On peut toujours supposer que les fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ne renferment aucun terme du premier degré en $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, car les termes du premier degré en $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, qui figureraient dans les expressions $\alpha_1 x', \alpha_2 y', \alpha_3 z', \alpha_4$, pourraient toujours être réunis avec les quantités $\lambda_1 \frac{dx}{ds}, \lambda_2 \frac{dy}{ds}, \lambda_3 \frac{dz}{ds}$. Les fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ étant supposées ne contenir aucun terme du premier degré en $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, aucune réduction ne peut avoir lieu entre les divers termes de la quantité

$$\alpha_1 \frac{dx'}{ds'} + \alpha_2 \frac{dy'}{ds'} + \alpha_3 \frac{dz'}{ds'},$$

et les divers termes de la quantité

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial s'} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial s'} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial s'} \frac{dz}{ds},$$

ces derniers étant tous du premier degré en $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

La force X, ne devant évidemment pas changer de grandeur lorsqu'on change l'origine des coordonnées sans changer la direction ni le sens des axes, ne peut dépendre des variables

$$x, \quad y, \quad z; \quad x', \quad y', \quad z'$$

que par les binômes

$$(x' - x), \quad (y' - y), \quad (z' - z).$$

D'après ce que nous venons de dire, il doit en être de même séparément de l'expression

$$\alpha_1 \frac{dx'}{ds'} + \alpha_2 \frac{dy'}{ds'} + \alpha_3 \frac{dz'}{ds'},$$

et de l'expression

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial s} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial s'} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial s} \frac{dz}{ds}.$$

Mais α_1, α_2, α_3, et par conséquent la première des deux expressions que nous venons d'écrire, ne dépendent pas des variables x, y, z. Il en résulte que

$$\alpha_1 \frac{dx'}{ds'} + \alpha_2 \frac{dy'}{ds'} + \alpha_3 \frac{dz'}{ds'}$$

ne dépend pas de x', y', z'. Cela doit avoir lieu, quels que soient $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$; et, comme α_1, α_2, α_3 ne dépendent pas de ces dernières variables, on voit que α_1, α_2, α_3 sont des quantités indépendantes de x', y', z' comme de x, y, z. Ces quantités dépendent uniquement de $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, en sorte que nous pouvons écrire

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right),\\ \alpha_2 &= \alpha_2\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right),\\ \alpha_3 &= \alpha_3\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right). \end{aligned}\right.$$

L'expression

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial s'}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial s'}\frac{dz}{ds}$$

ne doit également, comme nous l'avons vu, dépendre de x, y, z; x', y', z' que par les binômes $(x'-x)$, $(y'-y)$, $(z'-z)$. On en conclut aisément que, si l'on pose

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda_1}{\partial x'} = A_{11}, && \frac{\partial \lambda_1}{\partial y'} = A_{12}, && \frac{\partial \lambda_1}{\partial z'} = A_{13},\\ &\frac{\partial \lambda_2}{\partial x'} = A_{21}, && \frac{\partial \lambda_2}{\partial y'} = A_{22}, && \frac{\partial \lambda_2}{\partial z'} = A_{23},\\ &\frac{\partial \lambda_3}{\partial x'} = A_{31}, && \frac{\partial \lambda_3}{\partial y'} = A_{32}, && \frac{\partial \lambda_3}{\partial z'} = A_{33}, \end{aligned}\right.$$

toutes les quantités A_{ij} seront fonctions simplement de $(x'-x)$, $(y'-y)$, $(z'-z)$.

Moyennant les notations (13) et (14), l'égalité (12) deviendra

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
X = \; & A_{11}\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + A_{12}\frac{dx}{ds}\frac{dy'}{ds'} + A_{13}\frac{dx}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\
& + A_{21}\frac{dy}{ds}\frac{dx'}{ds'} + A_{22}\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + A_{23}\frac{dy}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\
& + A_{31}\frac{dz}{ds}\frac{dx'}{ds'} + A_{32}\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'} + A_{33}\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\
& + \alpha_1\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)\frac{dx'}{ds'} \\
& + \alpha_2\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)\frac{dy'}{ds'} \\
& + \alpha_3\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)\frac{dz'}{ds'}.
\end{aligned}
\right.
$$

La quantité X′ est susceptible de s'exprimer d'une manière analogue.

Si l'on désigne par A'_{ij} ce que devient A_{ij} lorsqu'on y permute

$$x, \quad y, \quad z, \quad s$$

avec

$$x', \quad y', \quad z', \quad s',$$

la première des égalités (7)

$$X + X' = 0$$

deviendra

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
& (A_{11} + A'_{11})\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + (A_{12} + A'_{21})\frac{dx}{ds}\frac{dy'}{ds'} + (A_{13} + A'_{31})\frac{dx}{dz}\frac{dz'}{ds'} \\
& + (A_{21} + A'_{12})\frac{dy}{ds}\frac{dx'}{ds'} + (A_{22} + A'_{22})\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + (A_{23} + A'_{32})\frac{dy}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\
& + (A_{31} + A'_{13})\frac{dz}{ds}\frac{dx'}{ds'} + (A_{32} + A'_{23})\frac{dz}{ds}\frac{dy'}{ds'} + (A_{33} + A'_{33})\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\
& + \alpha_1\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)\frac{dx'}{ds'} + \alpha_1\left(\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds}, \frac{dz'}{ds}\right)\frac{dx}{ds} \\
& + \alpha_2\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)\frac{dy'}{ds'} + \alpha_2\left(\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds}, \frac{dz'}{ds'}\right)\frac{dy}{ds} \\
& + \alpha_3\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)\frac{dz'}{ds'} + \alpha_3\left(\frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'}\right)\frac{dz}{ds} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Cette identité doit avoir lieu quelles que soient la position et l'orientation de chacun des deux éléments ds et ds', c'est-à-dire quelles que soient les quantités

$$x,\quad y,\quad z;\quad x',\quad y',\quad z',$$
$$\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds},\quad \frac{dz}{ds},\quad \frac{dx'}{ds'},\quad \frac{dy'}{ds'},\quad \frac{dz'}{ds'},$$

les six dernières étant liées seulement par les relations (10).

La valeur des diverses quantités A_{ij} ne varie pas si, en laissant quelconques les six premières variables, nous donnons aux six dernières des valeurs particulières. Or, si nous faisons

$$\frac{dx}{ds} = 1,\qquad \frac{dy}{ds} = 0,\qquad \frac{dz}{ds} = 0,$$
$$\frac{dx'}{ds'} = 1,\qquad \frac{dy'}{ds'} = 0,\qquad \frac{dz'}{ds'} = 0,$$

l'identité (16) nous donne la première des relations

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} A_{11} + A'_{11} &= 0,\\ A_{22} + A'_{22} &= 0,\\ A_{33} + A'_{33} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Les deux dernières s'obtiennent d'une manière analogue.

Laissons encore quelconques les valeurs de x, y, z, x', y', z', et faisons

$$\frac{dx}{ds} = 1,\qquad \frac{dy}{ds} = 0,\qquad \frac{dz}{ds} = 0,$$
$$\frac{dx'}{ds'} = 0,\qquad \frac{dy'}{ds'} = 1,\qquad \frac{dz'}{ds'} = 0.$$

Nous aurons

$$(A_{12} + A'_{21}) + \alpha_1(0, 1, 0) + \alpha_2(1, 0, 0) = 0.$$

Posons

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha_1(1, 0, 0) = a_{11}, && \alpha_2(1, 0, 0) = a_{21}, && \alpha_3(1, 0, 0) = a_{31},\\ &\alpha_1(0, 1, 0) = a_{12}, && \alpha_2(0, 1, 0) = a_{22}, && \alpha_3(0, 1, 0) = a_{32},\\ &\alpha_1(0, 0, 1) = a_{13}, && \alpha_2(0, 0, 1) = a_{23}, && \alpha_3(0, 0, 1) = a_{33}, \end{aligned}\right.$$

et l'égalité précédente deviendra la première des égalités

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
&A_{12}+A_{21}+a_{12}+a_{21}=0,\\
&A_{13}+A_{31}+a_{13}+a_{31}=0,\\
&A_{21}+A_{12}+a_{21}+a_{12}=0,\\
&A_{23}+A_{32}+a_{23}+a_{32}=0,\\
&A_{31}+A_{13}+a_{31}+a_{13}=0,\\
&A_{32}+A_{23}+a_{32}+a_{23}=0.
\end{aligned}\right.$$

Les cinq autres s'établissent d'une manière analogue.

Moyennant les identités (17) et (18), l'identité (16) devient

$$\begin{aligned}
(a_{23}+a_{32})\left(\frac{dy}{ds}\frac{dz'}{ds'}+\frac{dz}{ds}\frac{dy'}{ds'}\right)+(a_{31}+a_{13})\left(\frac{dz}{ds}\frac{dx'}{ds'}+\frac{dx}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right)&\\
+(a_{12}+a_{21})\left(\frac{dx}{ds}\frac{dy'}{ds'}+\frac{dy}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right)&\\
=\quad \alpha_1\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx'}{ds'}+\alpha_1\left(\frac{dx'}{ds'},\frac{dy'}{ds'},\frac{dz'}{ds'}\right)\frac{dx}{ds}&\\
-\alpha_2\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)\frac{dy'}{ds'}+\alpha_2\left(\frac{dx'}{ds'},\frac{dy'}{ds'},\frac{dz'}{ds'}\right)\frac{dy}{ds}&\\
-\alpha_3\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)\frac{dz'}{ds'}+\alpha_3\left(\frac{dx'}{ds'},\frac{dy'}{ds'},\frac{dz'}{ds'}\right)\frac{dz}{ds}.&
\end{aligned}$$

Laissons $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ quelconques et faisons

$$\frac{dx'}{ds'}=1,\qquad \frac{dy'}{ds'}=0,\qquad \frac{dz'}{ds'}=0;$$

nous aurons la première des égalités

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha_1\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)&=-a_{11}\frac{dx}{ds}+a_{12}\frac{dy}{ds}+a_{13}\frac{dz}{ds},\\
\alpha_2\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)&=\quad a_{21}\frac{dx}{ds}-a_{22}\frac{dy}{ds}+a_{23}\frac{dz}{ds},\\
\alpha_3\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)&=\quad a_{31}\frac{dx}{ds}+a_{32}\frac{dy}{ds}-a_{33}\frac{dz}{ds};
\end{aligned}\right.$$

les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue.

Mais les fonctions α_1, α_2, α_3 sont supposées ne contenir aucun terme du premier degré en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. On a donc

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, & a_{12} &= 0, & a_{13} &= 0, \\ a_{21} &= 0, & a_{22} &= 0, & a_{23} &= 0, \\ a_{31} &= 0, & a_{32} &= 0, & a_{33} &= 0, \end{aligned}$$

moyennant quoi les identités (20) deviennent

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_1\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = 0, \\ &\alpha_2\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = 0, \\ &\alpha_3\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

et les identités (19) deviennent

$$(22) \qquad \left\{ \begin{aligned} A_{23} + A'_{32} &= 0, & A_{32} + A'_{23} &= 0, \\ A_{31} + A'_{13} &= 0, & A_{13} + A'_{31} &= 0, \\ A_{12} + A'_{21} &= 0, & A_{21} + A'_{12} &= 0. \end{aligned} \right.$$

En réunissant les résultats contenus dans les égalités (14), (15), (17), (21) et (22), on trouve que l'expression la plus générale de X est la suivante :

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} X = \quad & A_{11}\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + A_{12}\frac{dx}{ds}\frac{dy'}{ds'} + A_{13}\frac{dx}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\ & + A_{21}\frac{dy}{ds}\frac{dx'}{ds'} + A_{22}\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + A_{23}\frac{dy}{ds}\frac{dz'}{ds'} \\ & + A_{31}\frac{dz}{ds}\frac{dx'}{ds'} + A_{32}\frac{dz}{ds}\frac{dy'}{ds'} + A_{33}\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle les quantités A_{ij} sont des fonctions de $(x'-x)$, $(y'-y)$, $(z'-z)$, qui vérifient les égalités suivantes :

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} A_{11} + A'_{11} &= 0, & A_{23} + A'_{32} &= 0, & A_{32} + A'_{23} &= 0, \\ A_{22} + A'_{22} &= 0, & A_{31} + A'_{13} &= 0, & A_{13} + A'_{31} &= 0, \\ A_{33} + A'_{33} &= 0, & A_{12} + A'_{21} &= 0, & A_{21} + A'_{12} &= 0; \end{aligned} \right.$$

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \Lambda_{11}}{\partial y'} = \frac{\partial \Lambda_{12}}{\partial z'}, && \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial z'} = \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x'}, && \frac{\partial \Lambda_{12}}{\partial x'} = \frac{\partial \Lambda_{11}}{\partial y'},\\
&\frac{\partial \Lambda_{22}}{\partial y'} = \frac{\partial \Lambda_{22}}{\partial z'}, && \frac{\partial \Lambda_{21}}{\partial z'} = \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x'}, && \frac{\partial \Lambda_{22}}{\partial x'} = \frac{\partial \Lambda_{21}}{\partial y'},\\
&\frac{\partial \Lambda_{33}}{\partial y'} = \frac{\partial \Lambda_{32}}{\partial z'}, && \frac{\partial \Lambda_{31}}{\partial z'} = \frac{\partial \Lambda_{33}}{\partial x'}, && \frac{\partial \Lambda_{32}}{\partial x'} = \frac{\partial \Lambda_{31}}{\partial y'}.
\end{aligned}\right.$$

Y, Z, L, M, N s'expriment d'une manière semblable.

5. Les grandeurs L, M, N, X, Y, Z sont encore soumises à une condition que nous n'avons pas invoquée jusqu'ici. Dans chacune des deux lois, la force qui sollicite l'élément ds et l'axe du couple qui agit sur le même élément doivent être indépendants en grandeur et en direction du choix des axes coordonnés. Par conséquent, les deux grandeurs géométriques qui ont pour projections sur les axes, l'une les longueurs X, Y, Z, l'autre les longueurs L, M, N, doivent être en grandeur et direction indépendantes du choix des axes. Elles doivent dépendre uniquement des paramètres qui fixent la position relative des deux éléments ds, ds'.

La position relative des deux éléments ds et ds' dépend de quatre paramètres : la distance r d'un point $m(x, y, z)$ de l'élément ds à un point $m'(x', y', z')$ de l'élément ds' ; l'angle θ que l'élément ds fait avec la droite mm' ; l'angle θ' que l'élément ds' forme avec la même droite mm', enfin l'angle ω des deux directions ds, ds'.

Les relations

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial s} &= \frac{x-x'}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y-y'}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z-z'}{r}\frac{dz}{ds} = -\cos\theta,\\
\frac{\partial r}{\partial s'} &= \frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz'}{ds'} = \cos\theta',\\
\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} &= -\frac{1}{r}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right)\\
&\quad -\frac{1}{r}\left(\frac{x-x'}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y-y'}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z-z'}{r}\frac{dz}{ds}\right)\\
&\quad \times\left(\frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y'-y}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z'-z}{r}\frac{dz'}{ds'}\right)\\
&= -\frac{1}{r}(\cos\omega - \cos\theta\cos\theta')
\end{aligned}\right.$$

montrent que la position relative des deux éléments ds et ds' est fixée par les quatre paramètres r, $\frac{\partial r}{\partial s}$, $\frac{\partial r}{\partial s'}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$.

La longueur absolue de la grandeur géométrique, dont X, Y, Z sont les projections, est

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

L'orientation de cette grandeur est fixée, lorsqu'on connaît, d'une part, le cosinus de l'angle qu'elle forme avec la droite mm', cosinus qui a pour valeur

$$\frac{X(x'-x)+Y(y'-y)+Z(z'-z)}{r\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};$$

d'autre part, le cosinus de l'angle qu'elle fait avec l'élément ds, cosinus qui a pour valeur

$$\frac{X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{dz}+Z\frac{dz}{ds}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

On doit avoir

$$(27)\qquad X^2+Y^2+Z^2=\lambda\left(r,\frac{\partial r}{\partial s},\frac{\partial r}{\partial s'},\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right),$$

$$(28)\quad X(x'-x)+Y(y'-y)+Z(z'-z)=\mu\left(r,\frac{\partial r}{\partial s},\frac{\partial r}{\partial s'},\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right),$$

$$(29)\qquad X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}=\nu\left(r,\frac{\partial r}{\partial s},\frac{\partial r}{\partial s'},\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right).$$

En vertu des égalités (12) et (21), nous avons

$$X=\frac{\partial\mathfrak{A}_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\mathfrak{A}_2}{\partial s'}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\mathfrak{A}_3}{\partial s}\frac{dz}{ds}$$

et, d'une manière analogue,

$$Y=\frac{\partial\mathfrak{B}_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\mathfrak{B}_2}{\partial s'}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\mathfrak{B}_3}{\partial s'}\frac{dz}{ds},$$

$$Z=\frac{\partial\mathfrak{C}_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\mathfrak{C}_2}{\partial s'}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\mathfrak{C}_3}{\partial s'}\frac{dz}{ds}.$$

Appliquons à ces expressions l'identité (29). Le premier membre de cette identité est linéaire et homogène entre $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$; il est entier, homogène et du second degré en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. Le second membre doit donc être aussi une forme linéaire et homogène en $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$, et une forme quadratique homogène en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. Mais, $\frac{\partial r}{\partial s}$ est linéaire et homogène en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; $\frac{\partial r}{\partial s'}$ est linéaire et homogène en $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$; $\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$ est linéaire et homogène d'une part en $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, d'autre part en $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$. On doit donc avoir

$$\nu\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial r}{\partial s'}, \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right) = f(r)\frac{\partial r}{\partial s'}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + g(r)\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}.$$

En introduisant cette valeur de la fonction ν dans l'identité (29), et en y faisant

$$\frac{dx}{ds} = 1, \qquad \frac{dy}{ds} = 0, \qquad \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$\frac{dx'}{ds'} = 1, \qquad \frac{dy'}{ds'} = 0, \qquad \frac{dz'}{ds'} = 0,$$

on trouve la première des identités

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial x'} &= \left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(x'-x)^3}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{x'-x}{r}, \\ \frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial y'} &= \left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(y'-y)^3}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{y'-y}{r}, \\ \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z'} &= \left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(z'-z)^3}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{z'-z}{r}; \end{aligned}\right.$$

les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

En faisant dans l'identité (29)

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$\frac{dx'}{ds'} = 1, \qquad \frac{dy'}{ds'} = 0, \qquad \frac{dz'}{ds'} = 0,$$

on trouve la première des identités

$$
(31)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial x'} + \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial x'} &= 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(x'-x)^2(y'-y)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{y'-y}{r},\\
\frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial x'} + \frac{\partial \mathfrak{C}_1}{\partial x'} &= 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(x'-x)^2(z'-z)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{z'-z}{r},\\
\frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial y'} + \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial y'} &= 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(y'-y)^2(x'-x)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{x'-x}{r},\\
\frac{\partial \mathfrak{B}_3}{\partial y'} + \frac{\partial \mathfrak{C}_2}{\partial y'} &= 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(y'-y)^2(z'-z)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{z'-z}{r},\\
\frac{\partial \mathfrak{C}_1}{\partial z'} + \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial z'} &= 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(z'-z)^2(x'-x)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{x'-x}{r}.\\
\frac{\partial \mathfrak{C}_2}{\partial z'} + \frac{\partial \mathfrak{B}_3}{\partial z'} &= 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(z'-z)^2(y'-y)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{y'-y}{r};
\end{aligned}
\right.
$$

les cinq autres s'obtiennent d'une manière analogue.

En faisant dans l'identité (29)

$$
\frac{dx}{ds} = 0, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{dz}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{2},
$$
$$
\frac{dx'}{ds'} = 1, \qquad \frac{dy'}{ds'} = 0, \qquad \frac{dz'}{ds'} = 0,
$$

on obtient la première des identités

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
&2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(x'-x)(y'-y)(z'-z)}{r^3}\\
&\quad = \frac{\partial \mathfrak{B}_3}{\partial x'} + \frac{\partial \mathfrak{C}_2}{\partial x'} = \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial y'} + \frac{\partial \mathfrak{C}_1}{\partial y'} = \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial z'} + \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial z'};
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Parmi les identités (31) et (32) se trouvent les suivantes :

$$
\frac{\partial}{\partial x'}[\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_1] = 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(x'-x)^2(y'-y)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{y'-y}{r}.
$$
$$
\frac{\partial}{\partial y'}[\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_1] = 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(y'-y)^2(x'-x)}{r^3} + \frac{g(r)}{r}\,\frac{x'-x}{r},
$$
$$
\frac{\partial}{\partial z'}[\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_1] = 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(z'-z)(x'-x)(y'-y)}{r^3}.
$$

Au moyen de ces égalités, exprimons l'une des conditions nécessaires

$$\frac{\partial^2}{\partial y' \partial z'}[\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_1] = \frac{\partial^2}{\partial z' \partial y'}[\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_1],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z' \partial x'}[\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_1] = \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'}[\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_1],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'}[\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_1] = \frac{\partial^2}{\partial y' \partial x'}[\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_1],$$

la dernière, par exemple; nous trouverons

$$2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(x'-x)^2}{r^3} + \frac{d}{dr}\left[\frac{g(r)}{r^2}\right]\frac{(y'-y)^2}{r}$$
$$= 2\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right]\frac{(y'-y)^2}{r^3} + \frac{d}{dr}\left[\frac{g(r)}{r^2}\right]\frac{(x'-x)^2}{r},$$

ce qui entraîne

$$\frac{2}{r^2}\left[f(r) - \frac{g(r)}{r}\right] = \frac{d}{dr}\frac{g(r)}{r^2},$$

ou bien

$$f(r) = \frac{1}{2}\frac{d\,g(r)}{dr}. \tag{33}$$

Désignons par F la grandeur géométrique qui a pour composantes X, Y, Z; par (F, ds) l'angle que la direction de cette grandeur géométrique fait avec la direction de l'élément ds; en vertu de l'égalité (33), l'égalité (29) deviendra

$$\mathrm{F}\cos(\mathrm{F}, ds) = g(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} + \frac{1}{2}\frac{d\,g(r)}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\frac{\partial r}{\partial s'},$$

ou bien, en posant

$$\mathfrak{G}(r) = \int g(r)\,dr,$$

$$\mathrm{F}\cos(\mathrm{F}, ds) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathfrak{G}(r)}{\partial s\,\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathfrak{G}(r)}{dr^2}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Mais on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial s\,\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{\partial \varphi(r)}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s}\right] - \frac{\partial \varphi(r)}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial s'}\left[g(r)\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\frac{d\,g(r)}{dr}\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s'}\left[g(r)\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{d\,g(r)}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\frac{\partial r}{\partial s'}.\end{aligned}$$

On a donc

$$(34)\qquad \mathrm{F}\cos(\mathrm{F}, ds) = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial s'}\left[g(r)\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right] + \frac{3}{4}\frac{d\,g(r)}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\frac{\partial r}{\partial s'}.$$

On peut, tout en laissant fixe l'élément ds, faire varier l'élément ds' tout le long d'une courbe fermée. Dans ces conditions, la somme des projections des grandeurs géométriques $\mathrm{F}\,ds'$ sur une direction fixe quelconque, par exemple sur la direction de l'élément ds, doit être égale à 0. On doit donc avoir

$$\int \mathrm{F}\cos(\mathrm{F}, ds)\,ds' = 0,$$

l'intégrale s'étendant à un circuit fermé quelconque. Si l'on se reporte à l'identité (34), cela signifie que l'on doit avoir, quelle que soit la position des deux éléments ds et ds', c'est-à-dire quels que soient r, $\frac{\partial r}{\partial s}$, $\frac{\partial r}{\partial s'}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$, une identité de la forme

$$\begin{aligned}\frac{d\,g(r)}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\frac{\partial r}{\partial s'} &= \frac{\partial}{\partial s'}\mathcal{F}\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right)\\ &= \frac{\partial \mathcal{F}\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial \mathcal{F}\left(r, \frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}.\end{aligned}$$

Il est aisé de voir qu'une semblable identité n'est possible que si l'on a

$$\frac{d\,g(r)}{dr} = 0,$$

c'est-à-dire

$$g(r) = \gamma, \tag{35}$$

γ désignant une constante quelconque.

L'identité (33) devient alors

$$f(r) = 0. \tag{36}$$

Les identités (30) et (31) deviennent alors

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial x'} &= \frac{\gamma}{r}\,\frac{x'-x}{r}\left[1-\frac{(x'-x)^2}{r^2}\right],\\ \frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial y'} &= \frac{\gamma}{r}\,\frac{y'-y}{r}\left[1-\frac{(y'-y)^2}{r^2}\right],\\ \frac{\partial \mathfrak{C}_3}{\partial z'} &= \frac{\gamma}{r}\,\frac{z'-z}{r}\left[1-\frac{(z'-z)^2}{r^2}\right], \end{aligned}\right. \tag{37}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial x'} + \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial x'} = \frac{\gamma}{r}\,\frac{y'-y}{r} - 2\,\frac{\gamma}{r}\,\frac{(x'-x)^2(y'-y)}{r^3},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{38}$$

La première des identités (38) peut s'écrire

$$A_{21} + B_{11} = -\frac{\gamma}{r}\,\frac{y'-y}{r} - \frac{2\gamma}{r}\,\frac{(x'-x)^2(y'-y)}{r^3}.$$

Intervertissons les lettres x, y, z avec les lettres x', y', z'. A_{21} se change en A'_{21}, B_{11} en B'_{11} et nous avons

$$A'_{21} + B'_{11} = \frac{\gamma}{r}\,\frac{y'-y}{r} + \frac{2\gamma}{r}\,\frac{(x'-x)^2(y'-y)}{r^3}.$$

Nous avons donc

$$A_{21} + B_{11} + A'_{21} + B'_{11} = 0.$$

Mais, en vertu des égalités (24) et des égalités analogues relatives aux quantités B_1, nous avons

$$A_{12} + A'_{21} = 0,$$
$$B_{11} + B'_{11} = 0.$$

Nous obtenons donc la première des identités

$$(39)\qquad \begin{cases} A_{12} = A_{21}, & B_{21} = B_{12}, & C_{31} = C_{13}, \\ A_{13} = A_{31}, & B_{23} = B_{32}, & C_{32} = C_{23}; \end{cases}$$

les autres s'établissent d'une manière analogue.

Remarquons maintenant que les identités (37) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial x'} = -\frac{\gamma}{2}\frac{\partial}{\partial x'}\frac{(y'-y)^2+(z'-z)^2}{r^2},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial y'} = -\frac{\gamma}{2}\frac{\partial}{\partial y'}\frac{(z'-z)^2+(x'-x)^2}{r^2},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{C}_3}{\partial z'} = -\frac{\gamma}{2}\frac{\partial}{\partial z'}\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{r^2},$$

et donnent

$$\mathfrak{A}_1 = -\frac{\gamma}{2}\frac{(y'-y)^2+(z'-z)^2}{r^2} + \mathfrak{A}(y', z'),$$

$$\mathfrak{B}_2 = -\frac{\gamma}{2}\frac{(z'-z)^2+(x'-x)^2}{r^2} + \mathfrak{B}(z', x'),$$

$$\mathfrak{C}_3 = -\frac{\gamma}{2}\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{r^2} + \mathfrak{C}(x', y').$$

De là, nous déduisons

$$(40)\qquad \begin{cases} A_{12} = \dfrac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial y'} = -\dfrac{\gamma(y'-y)}{r^2} + \dfrac{\gamma}{r^3}[(y'-y)^2+(z'-z)^2](y'-y) + \dfrac{\partial \mathfrak{A}(y', z')}{\partial y'}, \\ B_{21} = \dfrac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial x'} = -\dfrac{\gamma(x'-x)}{r^2} + \dfrac{\gamma}{r^3}[(z'-z)^2+(x'-x)^2](x'-x) + \dfrac{\partial \mathfrak{B}(z', x')}{\partial x'}. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

La première des identités (38) peut s'écrire

$$A_{21} + B_{11} = -\frac{\gamma(y'-y)}{r^2} + \frac{2\gamma}{r^3}[(y'-y)^2+(z'-z)^2](y'-y).$$

Retranchons aux deux membres A_{12} qui est donné par la première égalité (40), et qui, en vertu de la première égalité (39), est identique

à A_{21}, et nous aurons

$$B_{11} = \frac{\gamma}{r^4}[(y'-y)^2+(z'-z)^2](y'-y) - \frac{\partial \mathfrak{A}(y',z')}{\partial y'}.$$

De là, nous déduisons

$$\frac{\partial B_{11}}{\partial y} = \frac{\gamma}{r^4}[(z'-z)^2-(y'-y)^2] + \frac{4\gamma(x'-x)^2(y'-y)^2}{r^6} - \frac{\partial^2 \mathfrak{A}(y',z')}{\partial z'^2}.$$

D'autre part, de la deuxième égalité (40), nous déduisons

$$\frac{\partial B_{21}}{\partial x'} = -\frac{\gamma}{r^4}(y'-y)^2 + \frac{4\gamma(x'-x)^2(y'-y)^2}{r^6} - \frac{\partial^2 \mathfrak{B}(z',x')}{\partial x'^2}.$$

Mais, en vertu de la troisième égalité (39), on a

$$\frac{\partial B_{21}}{\partial x'} = \frac{\partial B_{12}}{\partial x'}.$$

D'ailleurs, on doit avoir, d'après des égalités analogues aux égalités (25),

$$\frac{\partial B_{11}}{\partial y'} = \frac{\partial B_{12}}{\partial x'} = \frac{\partial^2 \mathfrak{B}_1}{\partial x' \partial y'}.$$

En exprimant cette égalité, on trouve

$$\frac{\gamma}{r^4}(z'-z)^2 - \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{A}(y',z')}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{B}(x',z')}{\partial x'^2}\right].$$

Si l'on observe que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ne dépendent de x, y, z que par les différences $(x'-x)$, $(y'-y)$, $(z'-z)$, ceci peut s'écrire

$$\frac{\gamma}{r^4} = \varphi[(x'-x),(z'-z)] + \psi[(y'-y),(z'-z)],$$

φ et ψ étant deux fonctions convenablement choisies.

Je vais démontrer que ceci ne peut avoir lieu que si l'on a

$$\gamma = 0. \tag{41}$$

Supposons en effet γ différent de 0.

Si on laisse à $(x'-x)$ et à $(y'-y)$ des valeurs quelconques, et si l'on donne à $(z'-z)$ la valeur o, les deux fonctions

$$\varphi[(x'-x), (z'-z)],$$
$$\psi[(y'-y), (z'-z)]$$

peuvent être ou toutes deux finies, ou toutes deux infinies; mais l'une ne peut devenir infinie tandis que l'autre demeurerait finie, car, dans l'égalité

$$\frac{\gamma}{r^3} = \varphi[(x'-x), (z'-z)] + \psi[(y'-y), (z'-z)],$$

pour $(z'-z) = 0$, $(x'-x)$ et $(y'-y)$ ayant des valeurs quelconques, le premier membre serait fini et le second infini.

Supposons en premier lieu que les deux fonctions

$$\varphi[(x'-x), (z'-z)], \quad \psi[(y'-y), (z'-z)]$$

demeurent finies pour $(z'-z) = 0$. Posons

$$\Phi(x'-x) = \varphi[(x'-x), 0],$$
$$\Psi(y'-y) = \psi[(y'-y), 0]:$$

nous aurons

$$\frac{\gamma}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2]^2} = \Phi(x'-x) + \Psi(y'-y).$$

Le premier membre devient infini pour $(x'-x) = 0$, $(y'-y) = 0$ si γ n'est pas nul. Je dis qu'il n'en peut être de même du second. En effet, l'une au moins des deux fonctions Φ, Ψ deviendrait infinie pour la valeur o de son argument. Supposons que ce soit la fonction Φ. Alors, si l'on faisait $(x'-x) = 0$, en laissant $(y'-y)$ quelconque, dans l'égalité précédente, le premier membre serait fini et le second infini.

Supposons en second lieu que φ et ψ deviennent tous deux infinis pour $(z'-z) = 0$.

Remarquons que l'on a

$$\frac{\gamma}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^2}$$
$$= \varphi[(x'-x), (z'-z)] + \psi[(y'-y), (z'-z)],$$

$$\frac{\gamma}{[(x'_1-x_1)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^2}$$
$$= \varphi[(x'_1-x_1), (z'-z)] + \psi[(y'-y), (z'-z)],$$

ou, en retranchant,

$$\gamma\left\{\frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^2} - \frac{1}{[(x'_1-x_1)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^2}\right\}$$
$$= \varphi[(x'-x), (z'-z)] - \varphi[(x'_1-x_1), (z'-z)].$$

Pour $(z'-z)=0$, le premier membre est fini; il en est donc de même du second; ainsi, bien que l'on ait

$$\varphi[(x'-x), 0] = \infty,$$

la différence

$$\varphi[(x'-x), 0] - \varphi[(x'_1-x_1), 0]$$

est finie. Si donc on désigne par a une valeur déterminée de $(x'-x)$, et si l'on pose

$$\Theta(z'-z) = \varphi[a, (z'-z)],$$

on pourra écrire

$$\varphi[(x'-x), (z'-z)] = \Theta(z'-z) + \varphi_1[(x'-x), (z'-z)],$$

φ_1 demeurant fini pour $(z'-z)=0$.

En se reportant alors à l'égalité

$$\frac{\gamma}{r^2} = \varphi[(x'-x), (z'-z)] + \psi[(y'-y), z'-z)],$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\gamma}{r^2} - \varphi_1[(x'-x), (z'-z)] - \Theta(z'-z) = \psi[(y'-y), (z'-z)]$$

on voit que l'on doit avoir

$$\psi[(y'-y),(z'-z)] = -\Theta(z'-z) + \psi_1[(y'-y),(z'-z)],$$

ψ_1 demeurant fini pour $z'-z=0$.

On aura alors

$$\frac{\gamma}{r'} = \varphi_1[(x'-x),(z'-z)] + \psi_1[(y'-y),(z'-z)],$$

égalité dont on démontrera l'impossibilité comme on a démontré l'impossibilité de l'égalité

$$\frac{\gamma}{r'} = \varphi[(x'-x),(z'-z)] + \psi[(y'-y),(z'-z)]$$

dans le cas où les deux fonctions φ et ψ demeureraient finies pour $(z'-z)=0$.

On a donc, comme nous l'avions annoncé, l'égalité

$$\gamma = 0. \tag{41}$$

De cette identité (41), nous déduisons deux conséquences; en premier lieu, les identités (37) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} A_{11} &= \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial x'} = 0, \\ B_{22} &= \frac{\partial \mathfrak{B}_2}{\partial y'} = 0, \\ C_{33} &= \frac{\partial \mathfrak{C}_3}{\partial z'} = 0. \end{aligned}\right. \tag{42}$$

En second lieu, l'identité (34) devient

$$F\cos(F, ds) = 0.$$

La grandeur géométrique F est donc perpendiculaire à l'élément ds, ou identiquement nulle. Dans cette dernière hypothèse, la proposition à laquelle nous voulions parvenir serait établie. Nous attachant donc

à la première hypothèse, nous remarquerons que la grandeur géométrique $F'(X', Y', Z')$ doit être semblablement perpendiculaire à l'élément ds'. Mais les égalités (7) signifient que les deux grandeurs F et F' sont égales, parallèles et de sens contraire. La grandeur géométrique F est donc dirigée comme la perpendiculaire commune aux deux éléments.

Cela posé, faisons choix d'un système d'axes coordonnés ainsi composé. L'axe des x est parallèle à la perpendiculaire commune aux deux éléments; l'axe des y est parallèle à l'élément ds. Nous avons alors

$$x' - x = r, \qquad y' - y = 0, \qquad z' - z = 0,$$

$$\frac{dx}{ds} = 0, \qquad \frac{dy}{ds} = 1, \qquad \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$\frac{dx'}{ds'} = 0, \qquad \frac{dy'}{ds'} = \cos\omega, \qquad \frac{dz'}{ds'} = \sin\omega.$$

Si nous observons en outre que X devient F, que A_{11} est égal à 0, d'après l'une des identités (12), et que A_{23}, qui est en général une fonction de $(x' - x)$, $(y' - y)$ et $(z' - z)$, devient une fonction de r que nous pouvons désigner par $\mathcal{R}(r)$, nous trouverons

$$F = \mathcal{R}(r)\sin\omega. \tag{13}$$

Envisageons un circuit fermé plan dont fasse partie l'élément ds', et un élément ds situé dans le plan de ce circuit. Toutes les grandeurs géométriques $F\,ds'$ seront dirigées suivant la même droite, savoir suivant la perpendiculaire au plan de l'élément et du circuit. La somme de ces quantités devra par conséquent être égale à 0

$$\int \mathcal{R}(r)\sin\omega\, ds' = 0. \tag{14}$$

Appliquons cette égalité au cas particulier suivant.

Le circuit auquel appartient l'élément ds' est un rectangle ABCD (*fig.* 1), de base $DA = b$, de hauteur $AB = h$.

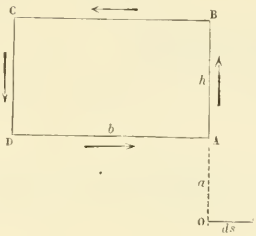
L'élément ds est parallèle à DA et situé sur le prolongement de BA, à une distance OA du point A.

Évaluons l'intégrale

$$J = \int \mathcal{A}(r) \sin\omega \, ds$$

étendue à ce contour.

Fig. 1.



Le long de AB, on a

$$\sin\omega = 1, \qquad ds' = dr;$$

les limites de l'intégration sont a et $a + h$. La partie correspondante de l'intégrale J a pour valeur

$$\int_a^{a+h} \mathcal{A}(r)\, dr.$$

Le long de BC, on a $\sin\omega = 0$. La partie correspondante de l'intégrale J est égale à 0.

Le long de CD, on a

$$\sin\omega = -1, \qquad ds = -\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - b^2}};$$

les limites de l'intégration sont $\sqrt{(a+h)^2 + b^2}$ et $\sqrt{a^2 + b^2}$. La partie correspondante de J a pour valeur

$$-\int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{(a+h)^2+b^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - b^2}} \mathcal{A}(r)\, dr.$$

Le long de DA, on a $\sin\omega = 0$. La partie correspondante de l'inté-

grale J est égale à o. On a donc

$$J = \int_a^{a+h} \mathfrak{R}(r)\,dr - \int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{(a+h)^2+b^2}} \mathfrak{R}(r)\,\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-b^2}}.$$

L'identité (11) nous donne alors

$$\int_a^{a+h} \mathfrak{R}(r)\,dr - \int_{\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{(a+h)^2+b^2}} \mathfrak{R}(r)\,dr = 0,$$

quels que soient a, b, h. Différentions cette identité par rapport à h. Elle nous donnera la nouvelle identité

$$\mathfrak{R}(a+h) - \frac{h}{(a+h)}\,\mathfrak{R}\left[\sqrt{(a+h)^2+b^2}\right] = 0,$$

ou bien, en posant

$$a+h = x,$$

$$\sqrt{(a+h)^2+b^2} = y,$$

$$\mathfrak{R}(x) = \frac{x-a}{\sqrt{y^2-b^2}}\,\mathfrak{R}(y).$$

Il suffit de faire dans cette identité, qui doit avoir lieu quels que soient a, b et h, $x = a$, c'est-à-dire $h = 0$, pour reconnaître qu'elle entraîne

$$\mathfrak{R}(x) = 0.$$

L'identité (13) devient alors

$$F = 0.$$

Un calcul tout semblable montrerait que la grandeur géométrique dont les projections sont L, M, N est identiquement nulle.

La proposition que nous avions énoncée est donc démontrée : *si l'on suppose connue l'action qu'un courant fermé et uniforme exerce sur un élément de courant uniforme, et si de plus on astreint la loi élémentaire à cette condition que le travail produit dans le dépla-*

cement de deux éléments par les actions mutuelles de ces éléments ne dépende que de leur changement de positions relative, cette loi élémentaire est susceptible au plus d'une détermination.

4. Ce théorème renferme comme cas très particulier celui que Gauss avait donné; si en effet la loi élémentaire est conforme à la règle de l'égalité entre l'action et la réaction, le travail produit dans le déplacement de deux éléments dépend uniquement de la variation de la distance mutuelle.

La loi d'Ampère et la loi de Grassmann conduisent à la même loi pour l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément de courant. Dans le cas où l'on adopte la loi d'Ampère, le travail élémentaire dépend uniquement du changement de position relative de deux éléments. D'après le théorème que nous venons de démontrer, il n'en peut être de même dans le cas où l'on adopte la loi de Grassmann. Il est aisé de le vérifier.

La loi d'Ampère et la loi du potentiel électrodynamique élémentaire, proposée par M. H. von Helmholtz, sont toutes deux telles que le travail élémentaire ne dépende que du déplacement relatif des deux éléments. Ces deux lois élémentaires ne peuvent donc conduire aux mêmes formules pour représenter l'action d'un courant fermé et uniforme sur un élément de courant uniforme; elles conduisent, en effet, pour ce problème à des résultats différents.

5. Le théorème que nous venons de démontrer est susceptible d'être étendu aux actions des courants qui ne sont pas fermés et uniformes.

Dans tout courant linéaire *réalisable*, l'intensité du courant doit varier d'une manière continue d'un point à l'autre du conducteur; de plus, si le conducteur traversé par le courant n'est pas fermé, l'intensité du courant doit être égale à o aux deux extrémités du conducteur.

Si l'on suppose donnée l'action d'un courant réalisable quelconque dont fait partie l'élément ds', et dont l'intensité en un point de cet élément est $\mathfrak{s}'$, sur un élément de courant quelconque, de longueur ds et d'intensité $\mathfrak{s}$, et si l'on veut de plus que le travail élémentaire ne dépende que du changement de position relative des deux éléments, la

loi élémentaire est-elle complètement déterminée? Le théorème précédent ne le démontre pas, car on pourrait fort bien imaginer qu'il existe deux lois élémentaires distinctes, différant l'une de l'autre par des termes en $\frac{d\mathfrak{s}}{ds}$ et $\frac{d\mathfrak{s}'}{ds'}$, et se réduisant l'une à l'autre lorsque l'on a

$$\frac{d\mathfrak{s}}{ds} = 0, \qquad \frac{d\mathfrak{s}'}{ds'} = 0.$$

Nous allons démontrer qu'il n'en est pas ainsi, et que la loi élémentaire est encore, dans ce cas, complètement déterminée. Développons cette démonstration pour la force élémentaire; le couple élémentaire donnerait lieu aux mêmes considérations.

Soient

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{X}\, ds\, ds', \\ \mathfrak{Y}\, ds\, ds', \\ \mathfrak{Z}\, ds\, ds'; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{X}_1\, ds\, ds', \\ \mathfrak{Y}_1\, ds\, ds', \\ \mathfrak{Z}_1\, ds\, ds' \end{array}\right.$$

les valeurs, dans chacune des deux lois, des composantes de la force exercée par l'élément ds' sur l'élément ds. Posons

$$\begin{aligned} X &= \mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}, \\ Y &= \mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}, \\ Z &= \mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}. \end{aligned}$$

Pour que les deux lois conduisent à la même action d'un courant réalisable quelconque sur un élément de courant quelconque, il faut et il suffit que l'on ait

$$(45) \quad \left\{\begin{array}{l} X = \frac{\partial}{\partial s'}\mathfrak{s}'\Phi\left(\mathfrak{s}', x', y', z', \mathfrak{s}, \frac{d\mathfrak{s}}{ds}, x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right), \\ Y = \frac{\partial}{\partial s'}\mathfrak{s}'\Theta\left(\mathfrak{s}', x', y', z', \mathfrak{s}, \frac{d\mathfrak{s}}{ds}, x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right), \\ Z = \frac{\partial}{\partial s'}\mathfrak{s}'\Psi\left(\mathfrak{s}', x', y', z', \mathfrak{s}, \frac{d\mathfrak{s}}{ds}, x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right). \end{array}\right.$$

Pour que le travail élémentaire dépende uniquement du déplace-

ment relatif des deux éléments de courant, il faut et il suffit que l'on ait

$$(46)\qquad \begin{cases} X + X' = 0, \\ Y + Y' = 0, \\ Z + Z' = 0. \end{cases}$$

En vertu de la première des identités (45), la première des identités (46) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(47)\qquad \begin{cases} \left(\Phi + \mathfrak{s}'\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{s}'}\right)\dfrac{d\mathfrak{s}'}{ds'} + \mathfrak{s}'\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x'}\dfrac{dx'}{ds'} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y'}\dfrac{dy'}{ds'} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z'}\dfrac{dz'}{ds'}\right) \\ \quad = -\left[\left(\Phi' + \mathfrak{s}\dfrac{\partial\Phi'}{\partial\mathfrak{s}}\right)\dfrac{d\mathfrak{s}}{ds} + \mathfrak{s}\left(\dfrac{\partial\Phi'}{\partial x}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial\Phi'}{\partial y}\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{\partial\Phi'}{\partial z}\dfrac{dz}{ds}\right)\right]. \end{cases}$$

Les quantités

$$\Phi + \mathfrak{s}'\frac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{s}'},\quad \mathfrak{s}'\frac{\partial\Phi}{\partial x'},\quad \mathfrak{s}'\frac{\partial\Phi}{\partial y'},\quad \mathfrak{s}'\frac{\partial\Phi}{\partial z'},$$

qui figurent au premier membre sont, comme Φ, indépendantes de

$$\frac{d\mathfrak{s}'}{ds'},\quad \frac{dx'}{ds'},\quad \frac{dy'}{ds'},\quad \frac{dz'}{ds'}.$$

Les quantités

$$\Phi' + \mathfrak{s}\frac{\partial\Phi'}{\partial\mathfrak{s}},\quad \mathfrak{s}\frac{\partial\Phi'}{\partial x},\quad \mathfrak{s}\frac{\partial\Phi'}{\partial y},\quad \mathfrak{s}\frac{\partial\Phi'}{\partial z},$$

qui figurent au second membre, sont, comme Φ', indépendantes de

$$\frac{d\mathfrak{s}}{ds},\quad \frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds},\quad \frac{dz}{ds}.$$

Le second membre est donc une fonction linéaire et homogène de ces quantités. Il doit en être de même du premier, et cela quels que soient

$$\frac{d\mathfrak{s}'}{ds'},\quad \frac{dx'}{ds'},\quad \frac{dy'}{ds'},\quad \frac{dz'}{ds'}.$$

Faisons

$$\frac{d\mathfrak{s}'}{ds'} = 0,\qquad \frac{dx'}{ds'} = 1,\qquad \frac{dy'}{ds'} = 0,\qquad \frac{dz'}{ds'} = 0.$$

Le premier membre se réduit à

$$\mathfrak{z}' \frac{\partial \Phi}{\partial x'},$$

qui doit ainsi être une fonction linéaire et homogène de

$$\frac{d\mathfrak{z}}{ds}, \quad \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}.$$

On démontrerait d'une manière analogue que $\mathfrak{z}' \frac{\partial \Phi}{\partial y'}$, $\mathfrak{z}' \frac{\partial \Phi}{\partial z'}$ sont des fonctions linéaires et homogènes des mêmes quantités. Dès lors, tous les termes qui figurent dans l'identité (47), sauf le premier, étant des fonctions linéaires et homogènes de ces quatre quantités, il doit en être de même du premier.

Les quatre quantités

$$\Phi + \mathfrak{z}' \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{z}'}, \quad \mathfrak{z}' \frac{\partial \Phi}{\partial x'}, \quad \mathfrak{z}' \frac{\partial \Phi}{\partial y'}, \quad \mathfrak{z}' \frac{\partial \Phi}{\partial z'},$$

c'est-à-dire les quatre dérivées partielles de $\varphi = \mathfrak{z}'\Phi$ par rapport à $\mathfrak{z}$, x', y', z', étant des fonctions linéaires et homogènes de

$$\frac{d\mathfrak{z}}{ds}, \quad \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

on a

$$\mathfrak{z}'\Phi = A\mathfrak{z}' \frac{dx}{ds} + B\mathfrak{z}' \frac{dy}{ds} + C\mathfrak{z}' \frac{dz}{ds} + D\mathfrak{z}' \frac{d\mathfrak{z}}{ds} + F\mathfrak{z}',$$

A, B, C, D, F étant cinq fonctions des seules variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad \mathfrak{z},$$
$$x', \quad y', \quad z', \quad \mathfrak{z}'.$$

dont le produit par $\mathfrak{z}'$ s'annule pour $\mathfrak{z}' = 0$.

Si nous supposons $\frac{d\mathfrak{z}}{ds} = 0$, $\frac{d\mathfrak{z}'}{ds'} = 0$, nous trouvons

$$\mathfrak{z}'\Phi = A\mathfrak{z}' \frac{dx}{ds} + B\mathfrak{z}' \frac{dy}{ds} + C\mathfrak{z}' \frac{dz}{ds} + F\mathfrak{z}'.$$

Mais nous trouvons ainsi la valeur de $\mathfrak{s}'\Phi$ qui convient à deux éléments de courant uniforme. Or, d'après le théorème démontré pour ce cas, toutes les dérivées partielles de Φ, qui sont les divers coefficients A_{ij} qui figurent dans l'expression (23) de la force X, sont égales à 0. Donc $\mathfrak{s}'\Phi$ doit se réduire à une constante, lorsque l'on fait $\mathfrak{s} = \text{const.}$, $\mathfrak{s}' = \text{const.}$, ce qui exige que l'on ait

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0.$$
$$F = \mathfrak{F}(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'),$$

et, par conséquent

$$\mathfrak{s}'\Phi = D(\mathfrak{s}', x', y', z', \mathfrak{s}, x, y, z)\mathfrak{s}'\frac{d\mathfrak{s}}{ds} + \mathfrak{s}'\mathfrak{F}(\mathfrak{s}\mathfrak{s}').$$

L'identité (47) deviendra alors

$$\begin{aligned}
&\left(D + \mathfrak{s}'\frac{\partial D}{\partial \mathfrak{s}'}\right)\frac{d\mathfrak{s}}{ds}\frac{d\mathfrak{s}'}{ds'} \\
&\quad + \left(\mathfrak{F} + \mathfrak{s}'\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{s}'}\right)\frac{d\mathfrak{s}'}{ds'} + \frac{\partial D}{\partial x'}\frac{dx'}{ds'} + \frac{\partial D}{\partial y'}\frac{dy'}{ds'} + \frac{\partial D}{\partial z'}\frac{dz'}{ds'} \\
&= -\left[\left(D' + \mathfrak{s}\frac{\partial D'}{\partial \mathfrak{s}}\right)\frac{d\mathfrak{s}'}{ds'}\frac{d\mathfrak{s}}{ds}\right. \\
&\qquad \left. + \left(\mathfrak{F}' + \mathfrak{s}\frac{\partial \mathfrak{F}'}{\partial \mathfrak{s}}\right)\frac{d\mathfrak{s}}{ds} + \frac{\partial D'}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial D'}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial D'}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right].
\end{aligned}$$

Le second membre est indépendant de $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$. Il doit en être de même du premier. On a donc

$$\frac{\partial D}{\partial x'} = 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial z'} = 0.$$

D'ailleurs D ne devant dépendre que des différences $(x' - x)$, $(y' - y)$, $(z' - z)$, on voit que D est indépendant des variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad x', \quad y', \quad z';$$

on a ainsi

$$D = \mathfrak{D}(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}').$$

et, par conséquent,

$$X = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{I}'}\left[\mathfrak{I}'\Phi(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')\right]\frac{d\mathfrak{I}}{ds}\frac{d\mathfrak{I}'}{ds'} + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{I}'}\left[\mathfrak{I}'\mathfrak{F}(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')\right]\frac{d\mathfrak{I}'}{ds'}.$$

La quantité X est la projection sur l'axe des x d'une grandeur géométrique qui doit dépendre uniquement, en grandeur et position, des intensités $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{I}'$, de leurs dérivées $\frac{d\mathfrak{I}}{ds}$, $\frac{d\mathfrak{I}'}{ds'}$, et de la position relative des deux éléments ds, ds'. Or cette projection est indépendante de la position des deux éléments par rapport à l'axe des x. Il en résulte qu'elle ne peut être qu'identiquement nulle, ainsi que la grandeur dont elle est la projection. Ce résultat démontre le théorème que nous avions énoncé.

Par conséquent, il est démontré que, *si l'on connaît l'action d'un courant réalisable quelconque sur un élément de courant quelconque, et si l'on veut ramener cette action à une action élémentaire telle que le travail produit par cette action dans le déplacement des deux éléments entre lesquels elle agit dépende uniquement de leur changement de position relative, la loi élémentaire est susceptible au plus d'une détermination.*

Nous avons démontré ailleurs [1] que la loi de l'action d'un courant réalisable quelconque sur un élément de courant était connue, ou, du moins, ne renfermait plus qu'une constante inconnue (*constante d'Helmholtz*) dont la valeur devra être demandée à l'expérience. Nous avons montré en outre que cette action pouvait être ramenée à une action élémentaire donnée par la loi suivante :

L'élément ds' exerce sur l'élément ds une attraction dirigée suivant la droite qui joint les deux éléments et ayant pour valeur

$$\frac{\mathcal{A}\mathfrak{I}\mathfrak{I}'\,ds\,ds'}{r^2}(2\cos\omega - 3\cos\theta\cos\theta') + \frac{\mathcal{A}\,ds\,ds'}{r}\left(\mathfrak{I}\frac{d\mathfrak{I}'}{ds'}\cos\theta - \mathfrak{I}'\frac{d\mathfrak{I}}{ds}\cos\theta'\right)$$
$$+ \mathcal{A}\frac{1+\lambda}{2}\frac{d\mathfrak{I}}{ds}\frac{d\mathfrak{I}'}{ds'}\,ds\,ds',$$

---

[1] *Applications de la Thermodynamique aux actions mutuelles des courants électriques* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XV. Helsingfors; 1887).

A étant la constante fondamentale de l'Électrodynamique, et λ la constante d'Helmholtz.

Cette action vérifie la règle de l'égalité entre l'action et la réaction; le travail produit par cette action par l'effet d'un déplacement des deux éléments entre lesquels elle agit dépend uniquement du changement de position relative des deux éléments; il résulte alors du théorème précédent qu'elle représente la seule action élémentaire jouissant de cette propriété et compatible avec la loi que nous avons démontrée par l'action d'un courant quelconque sur un élément de courant quelconque.

Recherches sur les groupes quadratiques crémoniens d'ordre fini. Second Mémoire : *Multiplication des crémoniennes, groupes quadratiques; groupe directeur;*

PAR M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

Dans un précédent Mémoire (*Journal de Mathématiques*, 1888; voir aussi *Comptes rendus*, 14 mars 1887), j'ai étudié les propriétés d'une substitution quadratique crémonienne isolée. Je vais montrer maintenant comment de pareilles substitutions se combinent pour former des groupes quadratiques crémoniens d'ordre fini.

Soient deux crémoniennes quadratiques

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ x, & u \end{smallmatrix}\right) \\ u_i & \psi_i\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ x, & u \end{smallmatrix}\right) \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\},$$

$$s' = \begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ x, & u \end{smallmatrix}\right) \\ u_i & \psi'_i\left(\begin{smallmatrix} c' & d' \\ x, & u \end{smallmatrix}\right) \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} a' & b' \\ c' & d' \end{matrix} \right\}.$$

On aura par définition

$$S = s's = \begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(\varphi, \psi) \\ u_i & \varphi'_i(\varphi, \psi) \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \Phi_i\left(\overset{a''}{x}, \overset{b''}{u}\right) \\ u_i & \Psi_i\left(\overset{c''}{x}, \overset{d''}{u}\right) \end{vmatrix}.$$

Les entiers a'', b'', c'', $d'' \leqq 8$, puisque les entiers a, b, c, d, a', b', c', $d' \leqq 2$.

Ainsi S n'est pas quadratique en général; il est nécessaire pour cela qu'il se sépare

des Φ_i un facteur $P\left(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{u}\right)$,

des Ψ_i » $Q\left(\overset{\gamma}{x}, \overset{\delta}{u}\right)$,

tels que les entiers

$$\left.\begin{matrix} a'a + b'c - \alpha, & a'b + b'd - \beta \\ c'a + d'c - \gamma, & c'b + d'd - \delta \end{matrix}\right\} \leqq 2.$$

Cela exige des conditions particulières fort étroites dont l'étude constitue les quatre premières Parties du présent travail.

Une discussion approfondie me permet, dans la cinquième Partie, d'énoncer le théorème suivant.

Appelons l toute monistique, telle que

$$l = \begin{vmatrix} x_1 & l_1 x_1 + l'_3 x_2 \\ x_2 & l_2 x_2 \\ x_3 & l'_2 x_1 + l'_1 x_2 + l_3 x_3 \\ u_1 & l_2 l_3 u_1 - l_2 l'_2 u_3 \\ u_2 & -l_3 l'_3 u_1 + l_1 l_3 u_2 + (l'_2 l'_3 - l_1 l'_1) u_3 \\ u_3 & l_1 l_2 u_3 \end{vmatrix}$$

et ρ, ϖ et e les mêmes substitutions que dans le premier Mémoire.

THÉORÈME. — *On obtient un groupe quadratique crémonien* G *en combinant ensemble d'une façon quelconque les substitutions* ρ, ϖ, e *avec des monistiques* l. *Tout groupe* G *peut être obtenu par ce procédé en combinant convenablement ensemble* ρ, ϖ, e *et* l.

Appelons z_1, z_2, z_3, z_4 les quatre fonctions suivantes des x_i et des u_i

$$x_1 u_3, \quad x_2 u_1, \qquad r_1 = x_2 u_2 - x_3 u_3, \quad x_2 u_3.$$

On aura réciproquement, en tenant compte de

$$\sum_i x_i u_i = 0,$$

les relations (α, β = facteurs de proportionnalité)

$$(0) \quad \begin{cases} \alpha x_1 = \quad 2 z_1 z_4, & \beta u_1 = \quad 2 z_2 z_4, \\ \alpha x_2 = \quad 2 z_4^2, & \beta u_2 = - z_1 z_2 + z_3 z_4, \\ \alpha x_3 = - z_1 z_2 - z_3 z_4, & \beta u_3 = \quad 2 z_4^2. \end{cases}$$

Cela posé, soient z'_j, z''_j, ... les transformées de z_j ($j = 1, 2, 3, 4$) par les diverses substitutions du groupe quadratique crémonien G. Les déplacements des z'_j, z''_j, ..., forment un groupe G' évidemment isomorphe à G. L'isomorphisme est d'ailleurs holoédrique : soit en effet s une substitution de G qui laisse immobile z_j : s, en vertu des relations (0), laissera immobiles x_i et u_i et $s = 1$.

Or un calcul simple montre que z'_j, z''_j, ... est une fonction linéaire homogène à coefficients constants des z_j et qu'une substitution s de G revient entre les z_j, z'_j, z''_j, ... à une substitution linéaire quaternaire de déterminant $\neq 0$. Ainsi les substitutions ρ, ϖ, e, l reviennent entre les z_j aux substitutions

$$\rho' = \begin{vmatrix} z_1 & -z_1 \\ z_2 & 2z_1 + z_2 \\ z_3 & z_3 \\ z_4 & -z_4 \end{vmatrix}, \qquad \varpi' = \begin{vmatrix} z_1 & z_4 \\ z_2 & z_3 \\ z_3 & z_2 \\ z_4 & z_1 \end{vmatrix}, \qquad e' = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & -z_3 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

$$l' = \begin{vmatrix} z_1 & l_1^2 z_1 + l_1 l_3' z_4 \\ z_2 & l_3 l_2 z_2 - l_2 l_2' z_4 \\ z_3 & -l_1 l_2 z_1 - l_3 l_3' z_2 + l_1 l_3 z_3 + (l_2' l_3 - 2 l_1 l_1') z_4 \\ z_4 & l_1 l_2 l_4 \end{vmatrix}.$$

Cela revient au théorème que voici :

Théorème. — *Le groupe* G *dérivé des substitutions* ρ, ϖ, e, l *est isomorphe avec holoédrie au groupe linéaire quaternaire* G′ *dérivé de* ρ', ϖ', e', l'.

Soient

$$s = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ u_i & v_i \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad s' = | z_j \quad T_j |, \qquad T_j = \sum_k a_{jk} z_k,$$

$a_{jk} =$ const. de déterminant $\neq 0$,

$$i = 1, 2, 3, \qquad j, k = 1, 2, 3, 4$$

une substitution de G et sa correspondante dans G′.

Les relations (o) donnent immédiatement

$$\begin{aligned} \alpha y_1 &= 2 T_1 T_4, & \beta v_1 &= 2 T_2 T_4, \\ \alpha y_2 &= 2 T_4^2, & \beta v_2 &= -T_1 T_2 + T_3 T_4, \\ \alpha y_3 &= -T_1 T_2 - T_3 T_4, & \beta v_3 &= 2 T_4^2 \end{aligned}$$

et, en remplaçant z_1, z_2, z_3, z_4 par $x_1 u_3$, $x_2 u_1$, x_1, $x_2 u_3$, on voit que s est de la forme

$$s = \begin{vmatrix} x_1 & 2 T_1 T_4 \\ x_2 & 2 T_4^2 \\ x_3 & -T_1 T_2 - T_3 T_4 \\ u_1 & 2 T_2 T_4 \\ u_2 & -T_1 T_2 + T_3 T_4 \\ u_3 & 2 T_4^2 \end{vmatrix},$$

$$T_j = a_{j1} x_1 u_3 + a_{j2} x_2 u_1 + a_{j3} x_1 + a_{j4} x_2 u_3.$$

On voit que les substitutions s et s' se déduisent avec la plus grande facilité l'une de l'autre.

Soient a' et b' deux substitutions de G'

$$a' = \left| z_i \quad \sum_j a_{ij} z_j \right| \qquad \text{et} \qquad b' = \left| z_i \quad \sum_j b_{ij} z_j \right|;$$

on aura, en vertu de théories connues,

$$b'a' = \left| z_i \quad \sum_k z_k \sum_j b_{ij} a_{ik} \right|.$$
$$i, j, k = 1, 2, 3, 4.$$

La substitution ba de G pourra s'écrire immédiatement et le problème de la multiplication des crémoniennes est résolu.

Le groupe G' n'est pas le groupe quaternaire linéaire le plus général. Soit s' une substitution linéaire quaternaire quelconque, s'^{-1} son inverse. Ce qui précède permet de construire immédiatement une substitution quadratique s qui opérera sur les fonctions

$$x_1 u_3 = z_1, \qquad x_2 u_4 = z_2, \qquad x_1 = z_3, \qquad x_2 u_3 = z_4$$

la substitution s'; s'^{-1} donnera de même une substitution quadratique s^{-1}. Ainsi s sera quadratique et birationnelle, mais pourra n'être pas une substitution de contact. Pour que s soit crémonienne, il faut que s n'altère pas l'équation

$$\sum_i u_i dx_i = 0$$

et que s' n'altère pas l'équation

$$0 = 2 z_2 z_4 d.2 z_1 z_4 + (-z_1 z_2 + z_3 z_4) d.2 z_4^2 - 2 z_4^2 d.(z_1 z_2 + z_3 z_4)$$

ou simplement, après départ de $2 z_4^2$,

$$(1) \qquad 0 = z_2 dz_1 - z_1 dz_2 + z_4 dz_3 - z_3 dz_4.$$

laquelle équation s'obtient en remplaçant, dans

$$\sum_i u_i dx_i = 0,$$

x_i et u_i par les valeurs en fonction de z_j.

Si d'ailleurs s' n'altère pas l'*équation de contact*, s est quadratique, birationnelle de contact et fait par suite partie du groupe G.

Pour que G soit d'ordre fini, il faut et il suffit que G′ soit d'ordre fini.

Au lieu de construire G, on peut construire G′, groupe *directeur* du groupe G, car les formules précédentes permettent de passer de G′ à G avec la plus grande facilité. Malheureusement la construction des groupes linéaires quaternaires d'ordre fini n'a point encore été faite et paraît présenter des difficultés énormes. Je n'ai même pas pu résoudre le problème, en tenant compte de ce que les substitutions de G′ n'altèrent pas l'équation de contact et que par suite G′ n'est pas le groupe linéaire quaternaire d'ordre fini général.

Je me borne donc dans la sixième Partie à construire G′ dans des cas particuliers.

Premier cas particulier. — *G est dérivé de* ρ, ϖ, l *sans l'intervention de la dualistique* e.

Alors G n'est autre chose que le groupe quadratique Cremona du troisième type (*Comptes rendus*, 27 août 1883 et 3 mars 1884; *Journal de Mathématiques*, p. 436; 1885).

Second cas particulier. — *Les monistiques* l, *qui concourent avec* ρ, ϖ, e *pour former* C, *sont de la forme*

$$\begin{vmatrix} x_1 & l_1 x_1 \\ x_2 & l_2 x_2 \\ x_3 & l_3 x_3 + l'_1 x_2 \\ \cdot\cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}.$$

Alors il y a pour G′ trois formes possibles :

I. $l'_1 = 0$. — G est dérivé de ϖ, e et de monistiques ayant toutes la

forme canonique

$$\begin{vmatrix} x_1 & l_1 x_1 \\ x_2 & l_2 x_2 \\ x_3 & l_3 x_3 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \end{vmatrix}.$$

$$l_i = \text{racine de l'unité.}$$

G ne contient que des crémoniques.

II. G' s'obtient en combinant la substitution

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \\ z_3 & z_1 \\ z_4 & z_2 \end{vmatrix} \quad \text{avec un groupe} \quad \begin{vmatrix} z_1 & p_{11} z_1 + p_{12} z_2 \\ z_2 & p_{21} z_1 + p_{22} z_2 \\ z_3 & z_3 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

où les coefficients p sont choisis de façon que

$$p_{22} p_{11} - p_{12} p_{21} = 1$$

et que le groupe linéaire binaire

$$\begin{vmatrix} l_1 & p_{11} l_1 + p_{12} l_2 \\ l_2 & p_{21} l_1 + p_{22} l_2 \end{vmatrix}$$

soit d'ordre fini.

III. G' est de la forme

$$\begin{vmatrix} z_1 & p_{11} z_1 + p_{12} z_2 \\ z_2 & p_{21} z_1 + p_{22} z_2 \\ z_3 & q_{11} z_3 + q_{12} z_4 \\ z_4 & q_{21} z_3 + q_{22} z_4 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{Bmatrix} p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21} \\ q_{11} q_{22} - q_{12} q_{21} \end{Bmatrix} = 1,$$

où les groupes linéaires binaires

$$\begin{vmatrix} l_1 & p_{11} l_1 + p_{12} l_2 \\ l_2 & p_{21} l_1 + p_{22} l_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} l_1 & q_{11} l_1 + q_{12} l_2 \\ l_2 & q_{21} l_1 + q_{22} l_2 \end{vmatrix}$$

sont d'ordre fini.

Troisième cas particulier. — *G est dérivé de ρ, e, l, sans l'intervention de ϖ.*

Alors G' est de la forme III du cas précédent et de plus $q_{21} = 0$ [1].

PRÉLIMINAIRES.

PRIMORDIALES, RÉSEAUX ET CONIQUES GÉNÉRALES D'UNE CRÉMONIENNE QUADRATIQUE.

Dans tout le présent Mémoire, je ferai un usage continuel des coniques du réseau ponctuel ou linéaire (*voir* premier Mémoire), relatif à une substitution crémonienne.

Je désigne, pour abréger, par le même symbole, une courbe et le premier membre de son équation. J'exprime par l'égalité des symboles la coïncidence des courbes.

Appelons $P^s_{pp} = 0$, $P^s_{lp} = 0$, ... les primordiales puncto-ponctuelle, linéo-ponctuelle, etc. d'une crémonienne s. Appelons C^s_p, C^s_l, ... la conique générale du réseau R^s_p, R^s_l, ..., c'est-à-dire la conique quelconque de ce réseau.

C^s_p sera représentée en coordonnées-points x_i par l'équation $P^s_{pp} = 0$, où y_i est *souligné*, c'est-à-dire considéré comme premier paramètre et non comme coordonnée (*voir* premier Mémoire). En coordonnées-lignes u_i, C^s_p sera représentée par $P^s_{lp} = 0$ avec y_i souligné. Par suite, $C^s_p = P^s_{pp}$ ou P^s_{lp} avec y_i souligné, et de même $C^s_l = P^s_{pl}$ ou P^s_{ll} avec v_i souligné, suivant que C^s_l est représenté en coordonnées-points x_i ou coordonnées-lignes u_i.

Rappelons, d'après le premier Mémoire, les propriétés de C^s_p et C^s_l, s étant l'une des six canoniques crémoniennes

$$\rho H \rho, \quad \rho E \varpi, \quad \varpi E \rho, \quad \varpi E \varpi, \quad \xi, \quad \pi.$$

On a (premier Mémoire) la liste suivante des primordiales et des

---

[1] Les principaux résultats du présent Mémoire ont fait l'objet d'une Note insérée dans les *Comptes rendus* le 23 mai 1887.

coniques générales de réseaux :

$$C_p^{\rho\Pi\rho} = Ay_2^2 + Bx_2^2 + hx_1x_2y_1y_2 = 0,$$
$$C_l^{\rho\Pi\rho} = v_3^2(4A - h^2x_1^2) - 2hx_1x_2v_1v_3 - x_2^2(v_1^2 - 4v_2v_3) = 0;$$
$$C_p^{\varpi E\rho} = -x_1x_2y_1y_2 + y_1^2(ex_2^2 + A) + x_2^2y_2y_3 = 0,$$
$$C_l^{\varpi E\rho} = 4v_2v_3(ex_2^2 + A) + (x_2v_1 + x_1v_3)^2 = 0;$$
$$C_p^{\rho E\varpi} = -x_1x_2y_1y_2 + (ey_2^2 + B)x_1^2 + x_2x_3y_2^2 = 0,$$
$$C_l^{\rho E\varpi} = 2x_1^2v_2v_3 + 4v_3^2(ex_1^2 + x_2x_3) - (v_1x_1 - x_2v_3)^2 = 0;$$
$$C_p^{\varpi E\varpi} = -x_1x_2y_1y_2 + ex_1^2y_1^2 + x_1^2y_2y_3 + y_1^2x_2x_3 = 0,$$
$$C_l^{\varpi E\varpi} = 4v_2v_3(ex_1^2 + x_2x_3) + (v_1x_1 + v_3x_2)^2 = 0;$$
$$C_p^{\xi} = AB - K^2(x_2y_1 - x_1y_2)^2 = 0,$$
$$C_l^{\xi} = (v_1^2 - 4v_2v_3)\mathfrak{A}_\xi - K^2(x_2v_1 + 2x_1v_3) = 0;$$
$$C_p^{\pi} = AB - K^2(x_1y_1 + x_2y_2)^2 = 0,$$
$$C_l^{\pi} = (v_1^2 - 4v_2v_3)^2\mathfrak{A}_\pi + K^2(v_1x_1 - 2x_2v_3)^2 = 0.$$

On a posé, comme dans le premier Mémoire,

$$A = x_1^2 - x_2x_3, \qquad B = y_1^2 - y_2y_3,$$
$$\mathfrak{A}_\xi = A - K^2x_2^2, \qquad \mathfrak{A}_\pi = A - K^2x_1^2.$$

On reconnaît, sur les douze équations précédentes, que les coniques C_p ou C_l représentées par ces équations adhèrent toutes au *focal* : j'appelle ainsi l'élément (ω, Ω). De plus, ces douze coniques ont les propriétés suivantes, résumées dans le Tableau ci-dessous :

σ.	La conique C_p^σ	La conique C_l^σ
$\rho\Pi\rho$	est osculatrice à A au focal	est osculatrice à $4A - h^2x_1^2 = 0$ au focal
$\varpi E\rho$	est osculatrice à $ex_2^2 + A = 0$ au focal	touche la conique $ex_2^2 + A = 0$
$\rho E\varpi$	passe par le point ω'	passe par le point $f(f_1 = 0, f_2 = 4, f_3 = 1)$
$\varpi E\varpi$	passe par le point ω'	touche la conique $ex_1^2 + x_2x_3 = 0$
ξ	touche la conique A	touche la conique $\mathfrak{A}_\xi$
π	touche la conique A	touche la conique $\mathfrak{A}_\pi$
ϖ	se réduit à un point	passe par ω'
ρ	se réduit à un point.	est osculatrice à A au foçal.

J'ai complété le Tableau par l'indication des coniques C_p^ρ, C_l^ρ, C_p^ϖ, C_l^ϖ en remarquant que

$$P_{pl}^\rho = c_1 x_1 x_2 + c_2 x_2^2 + c_3(x_1^2 - x_2 x_3) = 0,$$
$$P_{pl}^\varpi = c_1 x_1 x_2 + c_2 x_1^2 + c_3 x_2 x_3 = 0.$$

Les coniques C_p^ρ et C_p^ϖ se réduisent bien à un point, et ne sont pas représentables en coordonnées x_i par une seule, mais bien par deux équations.

Cela posé, une crémonienne quelconque (crémonique ou non) sera équivalente à l'une des huit canoniques du tableau. Soient s cette crémonienne; σ la canonique. On aura, par définition, en désignant par α et β deux linéaires monistiques ou dualistiques,

$$s = \alpha\sigma\beta$$

et (premier Mémoire)

$$C_p^s = \beta^{-1}[C_p^\sigma], \qquad C_l^s = \beta^{-1}[C_p^\sigma],$$
$$C_p^{s^{-1}} = \alpha[C_p^\sigma], \qquad C_l^{s^{-1}} = \alpha[C_l^\sigma],$$

puisque $\sigma = \sigma^{-1}$, toutes les canoniques étant égales à leurs inverses.

Ces égalités donnent sans difficulté les propriétés géométriques des coniques C_p et C_l relatives à une crémonienne quelconque.

PREMIÈRE PARTIE.

CLASSE DE $\rho[a]$ ET $\varpi[a]$, a DÉSIGNANT UNE CONIQUE.

1. Soit a une conique

$$(i, j = 1, 2, 3) \qquad a = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j = 0;$$

soient n et k l'ordre et la classe de $\rho[a]$.

On sait (Clebsch-Lindemann, *Leçons sur la Géométrie*, t. II de la traduction Benoist, p. 209) que $n \leq 4$.

Lemme. — *En général*, $k = 6$.

Soit u, de coordonnées u_i, une tangente à $\rho[a]$.

La substitution $\rho = \rho^{-1}$ étant de contact, les deux coniques a et

$$\rho[u] = \rho\left[\sum_i u_i x_i\right] = u_1 x_1 x_2 + u_2 x_2^2 + u_3(x_1^2 - x_2 x_3) = 0$$

doivent être tangentes entre elles tout comme les deux courbes $\rho[a]$ et u. Le tactinvariant de a et de $\rho[u]$ doit être nul. Cet invariant est précisément le discriminant du déterminant de la conique

$$\lambda_1 \rho[u] + \lambda_2 a,$$

considéré comme forme binaire en λ_1, λ_2. Ce déterminant

$$\begin{vmatrix} 2u_3\lambda_1 + a_{11}\lambda_2 & u_1\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 & a_{13}\lambda_2 \\ u_1\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 & 2u_2\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 & -u_3\lambda_1 + a_{23}\lambda_2 \\ +a_{31}\lambda_2 & -u_3\lambda_1 + a_{32}\lambda_2 & a_{33}\lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$= -2u_3^3\lambda_1^3 + \lambda_1^2\lambda_2 Q + 2\lambda_1\lambda_2^2 P + (a)\lambda_2^3,$$

$$P = a'_{12}u_1 + a'_{22}u_2 + (a'_{11} - a'_{23})u_3,$$

$$Q = -a_{11}u_3^2 - 2a_{13}u_1u_3 + 4a_{23}u_3^2 + a_{33}U,$$

$$U = 4u_2u_3 - u_1^2,$$

(a) = déterminant de la conique a et

$$a'_{ij} = \frac{\partial(a)}{\partial a_{ij}}.$$

Le discriminant de la forme cubique binaire en λ_1, λ_2, c'est-à-dire l'équation de $\rho[a]$ en coordonnées-lignes, est donc

$$\Delta\binom{6}{u} = [9(a)u_3^3 + PQ]^2 + (12Pu_3^3 + Q^2)[3(a)Q - 4P^2] = 0,$$

c'est-à-dire contient les u_i à la dimension six.

Il y a lieu de rechercher les conditions pour que $k \geq 4$, autrement dit pour qu'il se détache de $\Delta(u)$ un facteur en u_i au moins quadratique.

Je rappelle (*voir* premier Mémoire) :

1° Que les éléments fondamentaux de ρ adhèrent à ω ou à Ω;

2° Qu'à un élément fondamental adhérent à ω correspondent tous les points de la droite Ω, $x_2 = 0$;

3° Qu'à un élément fondamental adhérent à Ω correspondent les ∞ éléments adhérents à ω, c'est-à-dire tous les éléments de la courbe-point $u_3 = 0$.

2. *Si $k = 4$, $n = 3$.* — Supposons, en effet, qu'il se détache de $\Delta\binom{6}{u} = 0$ un facteur $\delta\binom{2}{u}$. Si $\delta\binom{2}{u}$ n'est pas décomposable, il se détache de $\rho[a]$ la conique dont l'équation en coordonnées-lignes est $\delta\binom{2}{u} = 0$ et $n = 2$, et par suite $k = 2$, car une conique est de la classe deux. Supposons $\delta\binom{2}{u} = \delta_1\binom{1}{u}\delta_2\binom{1}{u}$, et un au moins des deux facteurs δ_1 et δ_2 différent de u_3, par exemple $\delta_1\binom{1}{u} = \sum_i \delta_{1i} u_i$. Appelons δ' le point $\delta_1 = 0$, de coordonnées δ_{1i}; δ' ne coïncidera pas avec ω. Alors $\rho[a]$ a parmi ses adhérents les ∞ adhérents de δ', et la conique a a parmi ses adhérents les ∞ adhérents à $\rho[\delta']$, ce qui est absurde, car a devrait se décomposer en un couple de points, l'un des deux points devant être δ'.

Il faut ainsi que $\delta\binom{2}{u} = u_3^2$, et $\Delta\binom{6}{u}$ doit être divisible par u_3^2.

Si $a_{33} = 0$, a passe par ω, $n = 3$, et après départ de u_3^2 il reste, pour $\Delta(u) = 0$,

$$0 = [9(a)u_3^2 + Pq]^2 + (12Pu_3 + q^2)[3(a)u_3 q - 4P^2],$$
$$Q = u_3 q = u_3(-a_{11}u_3 - 2a_{13}u_1 + 4a_{23}u_3).$$

Si $a_{33} \neq 0$, $\Delta(u)$ ou, ce qui revient au même en n'écrivant pas les puissances de u_3 supérieures à la deuxième,

$$Q^2[P^2 - (a)Q]$$

doit être divisible par u_3^2. Un calcul élémentaire montre que cela est impossible si $a_{33} \neq 0$.

Donc, en toute hypothèse, $a_{33} = 0$; a passe par ω et $n = 3$.

3. *Si $k < 4$, $n = 2$ et par suite $k = 2$, et a adhère à l'élément focal.* — Pour que $k < 4$, il faut qu'il sépare au moins une fois le fac-

teur u_3 de l'équation précédemment obtenue

$$[9(a)u_3^2 + Pq]^2 + (12Pu_3 + q^2)[3(a)u_3 q - 4P^2] = 0,$$

qui représente $\rho[a]$ en coordonnées-lignes.

Cela exige que

$$P^2 q^2$$

soit divisible par u_3, c'est-à-dire que

$$(a'_{12}u_1 + a'_{22}u_2)a_{13}$$

soit identiquement zéro; donc, en toute hypothèse, $a_{13} = 0$; a adhère à l'élément focal, $u = k = 2$.

4. Étudions la classe k de $\varpi[a]$, et principalement les conditions qui rendent cette classe $\leqq 4$; appelons n l'ordre de $\varpi[a]$.

On vérifie aisément les propriétés suivantes en se reportant à l'étude de ϖ, faite dans le premier Mémoire.

1° En général, $n = 4$. Pour que $n = 3$, il faut et il suffit que a passe par ω (et il se sépare de $\varpi[a]$ la branche droite Ω', $x_1 = 0$), ou bien que a passe par ω' (et il se sépare de $\varpi[a]$ la branche droite Ω, $x_2 = 0$). Pour que $n = 2$, il faut et il suffit que a adhère au focal (et $\varpi[a]$ perd deux fois la branche droite Ω', c'est-à-dire le facteur x_1^2), ou bien que a passe par ω et par ω' (et $\varpi[a]$ perd les deux branches droites Ω et Ω', c'est-à-dire le facteur $x_1 x_2$).

2° Pour qu'il se sépare de $\varpi[a]$, le point ω, c'est-à-dire $u_3 = 0$ (ou ω', c'est-à-dire $u_2 = 0$), il faut et il suffit que a touche Ω' (ou Ω). Si l'on suppose que $n = 4$, a ne passe ni par ω, ni par ω', et alors Ω' (ou Ω) qui touche déjà a ne peut occuper, par rapport à a, aucune position plus spéciale; il ne peut donc se séparer de $\varpi[a]$ le facteur u_3^2 (ou u_2^2).

5. Lemme. — *En général, $k = 6$.* — On verra, comme plus haut (**1**), que pour avoir l'équation $\Delta[u]$ de $\varpi[a]$ en coordonnées-lignes u_i, il suffit de former le tactinvariant des deux coniques a et

$$\varpi\left[\sum_i u_i x_i\right] = u_1 x_1 x_2 + u_2 x_1^2 + u_3 x_2 x_3 = \varpi[u] = 0,$$

c'est-à-dire le discriminant de la forme cubique binaire en λ_1, λ_2, déterminant de la conique

$$\lambda_1 \varpi[u] + \lambda_2 a = 0.$$

On trouve, après un calcul analogue à un calcul précédent (**1**),

$$\Delta\binom{6}{u} = [9(a)u_2u_3^2 + PQ]^2 + (12Pu_2u_3^2 + Q^2)[3(a)Q - 4P^2] = 0,$$

où

$$P = a'_{12}u_1 + a'_{11}u_2 + a_{23}u_3,$$
$$Q = -a_{11}u_3^2 + 2a_{13}u_1u_3 - 4a_{23}u_2u_3 - a_{33}u_1^2;$$

le reste comme plus haut (**1**). Le lemme est ainsi démontré.

Pour que $k \leq 4$, il faut qu'il se sépare de $\Delta\binom{6}{u}$ un facteur de $\delta(u)$ au moins quadratique en u_i. On verra, comme plus haut, que si $\delta(u)$ est quadratique $\delta\binom{2}{u}$, cette forme se décompose en deux facteurs linéaires $\delta\binom{2}{u} = \delta_1\binom{1}{u}\delta_2\binom{1}{u}$: la démonstration est toute pareille à celle de **2**. Si un au moins des deux points $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 = 0$ est un point δ' qui ne coïncide ni avec ω, ni avec ω', $\varpi[a]$ compte parmi ses adhérents les ∞ adhérents de δ' et la conique a compte parmi ses adhérents les ∞ adhérents de $\varpi[\delta']$, ce qui est absurde. On ne peut avoir ainsi que

$$\delta\binom{2}{u} = u_2u_3, \qquad u_2u_3^2, \qquad u_2^2u_3.$$

Les deux dernières hypothèses sont impossibles, car il ne peut se détacher de $\varpi[a]$ (*voir* **4**, 2° —) plus d'une fois le facteur u_2 ou u_3, si a ne passe ni par ω, ni par ω', c'est-à-dire si $n = 4$.

Cela posé, il vient

6. Lemme. — *Si $k = 4$ et $n = 4$ la conique a touche Ω et Ω'.*

Si $k = 4$, il se sépare de $\Delta\binom{6}{u}$ un facteur quadratique qui ne peut être que u_2u_3, en vertu de ce qui précède; comme $n = 4$, par hypothèse, a doit toucher Ω et Ω'.

7. La courbe $\varpi[a]$ est, en général (Clebsch-Lindemann, *Leçons*

sur la Géométrie, traduction Benoît, t. II, p. 192), une biquadratique ayant un point double en ω' et un point de rebroussement en ω avec Ω pour tangente de rebroussement.

Si $n = 3$, a passe par ω et perd la branche droite Ω' ou bien a passe par ω' et perd la branche droite Ω. Il reste donc une cubique ayant, dans le premier cas, un point double en ω et passant par ω'; dans le second cas, un point double en ω' et passant par ω.

La classe d'une cubique à point double est, en général, quatre.

C. Q. F. D.

8. Si, n restant égal à trois, on voulait réduire à trois la classe k, il faudrait que le point double de la cubique $\varpi[a]$ devînt un point de rebroussement.

Dans le cas où a passe par ω, on a

$$a = a_1 x_3 + a_2 = 0,$$

a_1, a_2 = formes binaires en x_1, x_2 d'ordre égal à l'indice.

Par suite, après départ de x_1,

$$\varpi[a] = x_2 a'_1 x_3 + x_1 a'_2 = 0,$$

$a'_i = a_i$, après transposition x_1 et x_2 ($i = 1, 2$).

Les deux tangentes au point double ω sont

$$x_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad a'_1 = a_{23} x_1 + a_{13} x_2 = 0;$$

pour qu'elles se confondent, on doit avoir $a_{23} = 0$, et *a touche* Ω' *en* ω *et adhère à l'élément* (ω, Ω').

Dans le cas où a passe par ω',

$$a = a_1 x_2 + a_2 = 0;$$

il vient pour $\varpi[a]$, après départ de x_2,

$$a_1 x_1^2 + x_2 a_2 = 0,$$

a_i = forme binaire en x_1 et x_3 d'ordre égal à l'indice ($i = 1, 2$).

Pour que le point double ω' devienne de rebroussement, il faut que a_2 soit carré parfait, c'est-à-dire

$$a_{13}^2 - a_{11}a_{33} = 0,$$

et a *touche* Ω.

9. Enfin, si l'un des deux nombres n et k est deux, l'autre l'est aussi et a adhère au focal ou passe par ω et par ω'.

10. Nous pouvons résumer, sous forme de tableaux, tous les cas possibles où la classe k de $\varpi[a]$ et de $\rho[a]$ ne dépasse pas quatre, n étant l'ordre

$\rho[a]$.

n.	k.	La conique a
3.....	4	passe par ω
2.....	2	adhère au focal

et, de même,

$\varpi[a]$.

n.	k.	La conique a
4.....	4	touche Ω et Ω'
3.....	4	passe par ω ou ω'
3.....	3	passe par ω (ou ω') et touche Ω' (ou Ω)
2.....	2	adhère au focal ou passe par ω et ω'.

DEUXIÈME PARTIE.

PRODUIT D'UNE CRÉMONIENNE PAR LES CANONIQUES

$$\rho H \rho, \quad \rho E \varpi, \quad \varpi E \rho, \quad \varpi E \varpi.$$

11. Dans cette Partie et la suivante, je vais étudier les conditions nécessaires et suffisantes pour que le produit de deux crémoniennes *quadratiques* s et s' soit une crémonienne *quadratique* S. Je suppose que s, s', S ne sont ni linéaires, ni crémoniques.

Soient σ et σ' les canoniques de s et de s', et α, β, α', β' des linéaires; on aura (premier Mémoire)

$$s = \alpha\sigma\beta, \qquad s' = \alpha'\sigma'\beta', \qquad S = \alpha'\sigma'\beta'\alpha\sigma\beta.$$

Les variables u_i et x_i figureront aux mêmes dimensions dans S et dans $\sigma' m \sigma$, où l'on a posé $\beta' \alpha = m$. Il suffira donc d'étudier $\sigma' m \sigma = \Sigma$.

Appelons C_p^s, $C_q^s, \ldots$ la *conique générale*, c'est-à-dire l'une *quelconque* des ∞^2 coniques du réseau R_p^s, $R_q^s, \ldots$ ponctuel ou linéaire de la substitution crémonienne s. On aura, puisque Σ est quadratique par hypothèse,

$$C_p^{\Sigma} = C_p^{\sigma' m \sigma} = \sigma^{-1}[C_p^{\sigma' m}],$$

en vertu du premier Mémoire, et en exprimant l'identité des courbes par l'égalité des symboles.

Appelons, pour abréger l'écriture, a la conique $C_p^{\sigma' m} = m^{-1}[C_p^{\sigma'}]$ et $\mathfrak{a}$ la conique C_p^{Σ}. Il faudra que la canonique σ transforme la conique a en une autre conique $\mathfrak{a}$,

$$\sigma^{-1}[a] = \mathfrak{a} \qquad \text{ou} \qquad \sigma[a] = \mathfrak{a}, \qquad \sigma = \sigma^{-1}.$$

Si l'une au moins des deux canoniques σ et σ' est à deux composantes crémoniques, nous pourrons toujours supposer que c'est σ, sans quoi il suffira de considérer S^{-1} au lieu de S, ce qui ne change pas les dimensions auxquelles entrent dans S et S^{-1} les variables x_i et u_i.

Dans cette deuxième Partie, j'examinerai donc le cas où la canonique

$$\sigma = \rho H \rho, \qquad \rho E \varpi, \qquad \varpi E \rho \qquad \text{ou} \qquad \varpi E \varpi.$$

12. *Premier cas :* $\sigma = \rho H \rho$. — On a alors

$$\rho H \rho[a] = \mathfrak{a}, \qquad H \rho[a] = \rho[\mathfrak{a}].$$

Pour avoir l'équation coordonnées-points x_i de la courbe $\rho[\mathfrak{a}]$, il suffit donc d'effectuer la dualistique H sur les variables u_i dans l'équation en coordonnées-lignes u_i de la courbe $\rho[a]$; pour avoir l'équation en coordonnées-lignes de $\rho[\mathfrak{a}]$, il suffit d'effectuer H sur l'équation en coordonnées-points de $\rho[a]$. Soient n et k l'ordre et la classe de $\rho[a]$. n' et k' l'ordre et la classe de $\rho[\mathfrak{a}]$; on aura, par suite,

$$k' = n, \qquad n' = k.$$

On peut avoir seulement (Tableaux du n° **10**) $n, n' = 3$ ou 2. Mais alors $k, k' = 2$, et enfin $n = n' = 2$. Cela exige que $\rho[a]$ et $\rho[\mathfrak{a}]$ soient des coniques, et, par suite, a et $\mathfrak{a}$ doivent adhérer au focal.

15. On vérifie sans peine que la conique C_p^σ ou C_q^σ, σ étant l'une des six canoniques crémoniennes

$$\rho H \rho, \quad \rho E \varpi, \quad \varpi E \rho, \quad \varpi E \varpi, \quad \xi, \quad \pi,$$

adhère au focal. Nous dirons que ces six canoniques sont *tautofocales*.

De même, une crémonienne non canonique s sera *tautofocale* si C_p^s et C_q^s adhèrent au focal.

Une linéaire m sera *tautofocale* si elle laisse fixe le focal, c'est-à-dire si

$$m[(\omega, \Omega)] = (\omega, \Omega).$$

En remarquant qu'une monistique tautofocale l doit laisser fixes le point

$$\omega(x_1 = x_2 = u_3 = 0)$$

et la droite

$$\Omega(u_1 = x_2 = u_3 = 0),$$

et se reportant à mon Mémoire sur les groupes linéaires de contact (*Journal de Mathématiques*, p. 75; 1887), on construit immédiatement

$$l = \begin{vmatrix} x_1 & l_1 x_1 + l_3' x_2 \\ x_2 & l_2 x_2 \\ x_3 & l_2' x_1 + l_1' x_2 + l_3 x_3 \\ u_1 & l_2 l_3 u_1 - l_2 l_2' u_3 \\ u_2 & -l_3 l_3' u_1 + l_1 l_3 u_2 + (l_2' l_3' - l_1 l_1') u_3 \\ u_3 & l_1 l_2 u_3 \end{vmatrix}.$$

La dualistique très simple

$$e = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_3 \\ x_3 & u_2 \\ u_1 & x_1 \\ u_2 & x_3 \\ u_3 & x_2 \end{vmatrix} = e^{-1}$$

est tautofocale. Soit e' une seconde dualistique tautofocale; comme les linéaires *tautofocales* forment un groupe évidemment, $e'e$, qui est une linéaire monistique, sera tautofocale et de la forme l. Ainsi, *toute linéaire tautofocale sera de la forme l ou el*, selon qu'elle sera monistique ou dualistique.

Soit $s = \alpha\sigma\beta$ une crémonienne tautofocale équivalente à la canonique σ : la linéaire β sera évidemment tautofocale; α sera tautofocale si s^{-1} est tautofocale. Tout cela résulte évidemment de ce que

$$C_p^{\beta} \text{ et } C_s^{\alpha} \quad \text{adhèrent à } \beta^{-1}[(\omega, \Omega)],$$
$$C_p^{\alpha^{-1}} \text{ et } C_p^{s^{-1}} \qquad \text{»} \qquad \alpha\ [(\omega, \Omega)].$$

Une crémonique $\alpha\varrho\beta$ ou $\alpha\varpi\beta$ sera *tautofocale* si la linéaire β est tautofocale. D'ailleurs, ϱ et ϖ peuvent aussi être considérées comme tautofocales, car

$$C_l^{\varrho} \quad \text{et} \quad C_l^{\varpi}$$

adhèrent au focal. Les coniques C_p^{ϱ} et C_p^{ϖ} ne sont pas représentables en fait en coordonnées-points par une équation unique; aux ∞ éléments adhérents à un point ϱ et ϖ font correspondre les ∞ éléments adhérents à un autre point et la primordiale linéo-ponctuelle est linéaire en u_i. Nous pouvons exprimer ce fait en disant que C_p^{ϖ} ou C_p^{ϱ} dégénère en un couple de points dont l'un est ω; C_p^{ϖ} et C_p^{ϱ} peut donc être considérée comme ayant le focal parmi ses adhérents, et peut être considérée comme adhérente au focal. Je puis ainsi étendre aux crémoniques

d'une façon complète la notion de tautofocalité définie pour les crémoniennes.

14. Les résultats du n° **12**, en employant les notations du n° **13**, peuvent donc s'énoncer ainsi :

THÉORÈME. — *Pour que le produit $\sigma' m \sigma$ soit une crémonienne quadratique $\Sigma(\sigma', \sigma =$ canoniques, $\sigma = \rho \Pi \rho$, $m =$ linéaire$)$, il faut et il suffit que la linéaire m soit tautofocale; Σ est aussi tautofocale.*

En effet, $\mathfrak{a} = \sigma[C_p^{\sigma m}] = C_p^{\Sigma}$, qui adhère au seul élément fixe

$$m^{-1}[(\omega, \Omega)],$$

doit adhérer aussi (**12**) au focal; donc

$$(\omega, \Omega) = m^{-1}[(\omega, \Omega)] = m[(\omega, \Omega)]$$

et m est tautofocale, ainsi du reste que Σ, puisque $\mathfrak{a}$ adhère au focal.

15. *Deuxième cas :* $\sigma = \rho E \varpi$.

THÉORÈME. — *Pour que $\Sigma = \sigma' m \sigma$ soit une crémonienne quadratique, il faut et il suffit que m soit tautofocale, et alors Σ l'est aussi.*

Posons encore, avec les notations du n° **12**,

$$\rho E \varpi [a] = \mathfrak{a}, \qquad E \varpi [a] = \rho [\mathfrak{a}].$$

Soient n et R l'ordre de la classe $\varpi[a]$, n' et k' l'ordre et la classe de $\rho[\mathfrak{a}]$. On aura (**12**)

$$k' = n, \qquad n' = k.$$

La condition de l'énoncé est suffisante; car, alors qu'elle est remplie, $n = k = 2$, puisque a adhère au focal; $n' = k' = 2$, aussi $\rho[\mathfrak{a}]$ est une conique ainsi que $\mathfrak{a}$, et toutes deux adhèrent au focal.

La condition est aussi nécessaire. En effet, n et n' ne dépassent pas quatre; il en est de même de $k = n'$ et de $k' = n$. Si $k' \leq 4$, $n' = k = 3$ ou 2 (**10**, Tableaux) et $n = 3$ ou 2. Mais, si $n = 3$, $k = 4 = n'$, résultat absurde. La seule hypothèse possible est donc

$$n = k = n' = k' = 2, \qquad \rho[\mathfrak{a}] \quad \text{et} \quad \varpi[a] \text{ coniques};$$

$\mathfrak{a}$ adhère au focal, ainsi que $E\rho[\mathfrak{a}] = \varpi[a]$, puisque la dualistique E est tautofocale; donc a est adhérente au focal, et comme $a = C_p^{\pi m}$ et adhère à $m^{-1}[(\omega, \Omega)]$, m est tautofocale. On raisonnera sur les coniques C_e^{π} comme on vient de le faire sur les coniques C_p, et l'on achève la démonstration sans difficulté.

16. *Troisième cas :* $\sigma = \varpi E \rho$.

Théorème. — *La linéaire m doit, et cela suffit, être tautofocale; $\sigma' m \sigma$ est aussi tautofocale.*

On a

$$\varpi E \rho[a] = \mathfrak{a}, \qquad E\rho[a] = \varpi[\mathfrak{a}].$$

Soient n et k l'ordre et la classe de $\rho[a]$, n' et k' l'ordre et la classe de $\varpi[\mathfrak{a}]$. On a encore

$$n' = k, \qquad k' = n.$$

On démontre, comme plus haut, que la condition de l'énoncé est suffisante.

Puisque $4 \geq n' = k$, il vient (**10**, Tableaux)

$$n = 2 \qquad \text{ou} \qquad 3 = k'.$$

Si $k' = 3$, $n' = 3 = k$; ce dernier résultat est en contradiction avec (**10**, Tableaux). La seule hypothèse possible est donc

$$k' = n = n' = k = 2;$$

la démonstration s'achève comme plus haut.

17. *Quatrième cas :* $\sigma = \varpi E \varpi$. On a

$$\varpi E \varpi [a] = \mathfrak{a}, \qquad E \varpi [\mathfrak{a}] = \varpi [\mathfrak{a}].$$

Soient k et n l'ordre et la classe de $\varpi[a]$, k' et n' la classe et l'ordre de $\varpi[\mathfrak{a}]$.

En se reportant aux Tableaux (**10**), on voit qu'on ne peut faire que trois hypothèses, eu égard aux relations $n = k'$, $k = n'$, savoir

$$(\mathrm{I}) \qquad n = n' = k = k' = 1,$$

$$(\mathrm{II}) \qquad n = n' = k = k' = 3,$$

$$(\mathrm{III}) \qquad n = n' = k = k' = 2.$$

18. *Hypothèse I.* — D'après le Tableau (**10**), a et $\mathfrak{a}$ doivent toucher Ω et Ω'; comme $a = C_p^{\sigma' m}$, $\mathfrak{a} = C_p^{\Sigma}$, on voit, en se reportant aux *Préliminaires*, que la canonique σ' est ϖ et la crémonienne Σ équivalente à ϖ; de plus, m est dualistique. Soit donc $f(\overset{2}{u}, \overset{2}{y}) = 0$ la primordiale linéo-ponctuelle de ϖ; l'équation $f(m[u], y) = 0$ sera la primordiale puncto-ponctuelle de $\sigma' m$ et $f(m[u], \underline{y}) = 0$ sera l'équation de $C_p^{\sigma' m}$, c'est-à-dire de a. En un mot, les coefficients des puissances des x_i, dans l'équation de a, seront des fonctions *rationnelles quadratiques* des y_i. Comme a touche $\Omega(x_2 = 0)$ et $\Omega'(x_1 = 0)$, on voit que l'équation de a est

$$2a_0 x_1 x_2 + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 = 0,$$

$$\left.\begin{array}{ll} a_0 = \text{forme quadratique en } y_i \\ a_i = \quad \text{»} \quad \text{linéaire} \quad \text{»} \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Pour avoir encore l'équation de $\varpi[a]$ en coordonnées-lignes, je forme, comme plus haut (**1**) et (**5**), le tactinvariant $\Delta(u)$ de la conique a avec la conique

$$\varpi[u] = \varpi\left[\sum_i u_i x_i\right] = u_1 x_1 x_2 + u_2 x_1^2 + u_3 x_2 x_3 = 0.$$

Faisant le calcul, c'est-à-dire formant le discriminant de la forme

cubique linéaire, déterminant de la conique

$$\lambda_1 a + \lambda_2 \varpi[u] = 0,$$

on trouve, après départ de $u_2 u_3$, ce qui était prévu,

$$\begin{aligned}\Delta\binom{4}{u} = {} & 4a_2\lambda^4 - 6a_0u_3\lambda^3 + 96a_2^2a_3u_2u_3\lambda^2 \\ & - 216a_0a_2a_3u_2u_3^2\lambda + 81a_0^2a_3u_2u_3^3 + 192a_2^3a_3^2u_2^2u_3^2 = 0,\end{aligned}$$

avec

$$\lambda = a_3u_1 - a_1u_3.$$

On ne peut avoir identiquement $a_2 = 0$, car il se détacherait alors de $\Delta\binom{4}{u}$, le facteur u_3 et k ne serait plus 4. De plus, $\Delta\binom{4}{u}$ contient y_i à la dimension cinq. Si j'effectue sur $\Delta\binom{4}{u} = 0$, équation de $\varpi[a]$ en coordonnées-lignes, la dualistique E, j'obtiens l'équation de $E\varpi[a]$ en coordonnées-points x_i et, si j'effectue encore dans cette dernière la substitution ϖ sur les x_i, j'obtiens l'équation de $\varpi E\varpi[a] = \mathfrak{a} = C_p^{\Sigma}$ en coordonnées-points x_i. Ces diverses opérations n'altèrent pas la dimension à laquelle entrent les y_i; cette dimension est deux dans $\mathfrak{a}$, puisque l'équation de $\mathfrak{a}$ est aussi le premier membre de la primordiale puncto-ponctuelle de Σ; par suite, il doit se séparer de $\Delta(u)$ un facteur (y) cubique au moins. Le facteur (y) divise tous les coefficients de $\Delta(u)$ et, en particulier, $a_2^3a_3^2$, coefficient de $u_2^2u_3^2$. Ce coefficient n'est pas nul, car a_2 n'est pas nul et a_3 n'est pas nul, puisque $a_0^3a_3^2$ est le déterminant de a. Ainsi (y) contient au moins une fois a_2 et, pour $a_2 = 0$, tous les coefficients de $\Delta(u)$ étant nuls, $\Delta(u)$ est lui-même nul, *quels que soient les* u_i. $\Delta(u)$ est le tactinvariant de a avec

$$\varpi[u] = u_1x_1x_2 + u_2x_1^2 + u_3x_2x_3 = 0;$$

par suite, la conique a, avec $a_2 = 0$, c'est-à-dire

$$a' = 2a_0x_1x_2 + (a_1x_1 + a_3x_3)^2 = 0,$$

touche $\varpi[u]$ *quels que soient* u_i, c'est-à-dire la conique générale C^{ϖ}. Cette conique C_l^{ϖ} adhère au focal et passe par ω'; à part cela,

elle n'est assujettie à aucune condition. La conique a' touche Ω en un point mobile avec les y_i et Ω' en ω'; il faudrait donc que a' touchât Ω en ω; cela exige que $a_3 = 0$ en même temps que $a_2 = 0$, autrement dit

$$a_2 = b_2 p, \qquad a_3 = b_3 p, \qquad p = \text{forme linéaire en } y_i,$$
$$b_2,\ b_3 = \text{const.}$$

On ne peut avoir d'ailleurs $a_1 = b_1 p$, $b_1 = \text{const.}$, car a toucherait Ω et Ω' en deux points *fixes* et $a = C_p^{\sigma m}$ le réseau de la crémonienne ; $\sigma' m$ serait un réseau de coniques à deux points et à deux tangentes fixes (ce qui est impossible, d'après les *Préliminaires*).

Il résulte de ce qui précède que $(y) = p^3$ doit diviser $\Delta(u)$ ou, en n'écrivant pas les puissances de p supérieures au cube, doit diviser [en remarquant que p doit diviser a_0, $a_0 = b_0 p$ (¹)]

$$p\lambda^3(2b_2\lambda - 3b_0 u_3), \qquad \lambda = -a_1 u_3 + b_3 p u_1.$$

Par suite, p^2 divise

$$\{-a_1^3 u_3^3 + 3a_1^2 b_3 p u_3^2 u_1 + p^2(\ldots)\}$$
$$\times \{-(2b_2 a_1 + 3b_0) u_3 + 2b_2 b_3 p u_1\}.$$

Or p^2 ne divise pas a_1^3 et doit diviser $2b_2 a_1 + 3b_0$, qui doit être identiquement zéro. Alors il faut que $b_2 b_3 = 0$, c'est-à-dire $a_2 a_3 = 0$, ce qui est absurde en vertu de ce qui précède. De là résulte : *l'hypothèse I est inadmissible.*

19. *Hypothèse II.* — Quatre hypothèses sont possibles, si

$$k = k' = n = n' = 3 :$$

a passe par	ω	et touche	Ω'	a passe par	ω	et touche	Ω'
»	»	»	»	»	ω'	»	Ω
»	ω'	»	Ω	»	ω	»	Ω'
»	ω'	»	Ω	»	ω'	»	Ω

(¹) Il suffit d'écrire, pour le voir, que $\Delta(u) = 0$ identiquement pour $p = 0$.

Il suffit de discuter les deux premières et la quatrième, puisque a et $\mathfrak{a}$ se comportent d'une façon pareille dans la discussion.

Pour les deux premières hypothèses a passe par ω et touche Ω'. $x_1 = 0$; donc

$$a = 2a_{13}x_1x_3 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

et, après départ de x_1,

$$\varpi[a] = 2a_{13}x_2^2x_3 + a_{22}x_1^3 + 2a_{12}x_1^2x_2 + a_{11}x_1x_2^2 = 0.$$

Appelons *élément de rebroussement* (ou d'*inflexion*) l'élément formé par le point et la tangente de rebroussement (ou d'inflexion). Le focal est l'élément de rebroussement de la cubique $\varpi[a]$.

La première hypothèse est inadmissible. En effet, $\mathfrak{a}$ passerait, comme a, par ω et toucherait Ω'; $\varpi[\mathfrak{a}]$ aurait en (ω, Ω) son élément de rebroussement. Une dualistique quelconque, telle que E, transforme évidemment des éléments de rebroussement en éléments d'inflexion : donc $E\varpi[\mathfrak{a}] = \varpi[a]$ aurait un élément d'inflexion en

$$E[(\omega, \Omega)] = (\omega, \Omega).$$

Cela est absurde, car on s'assure aisément que la droite ϖi (i point d'inflexion de $\varpi[a]$) a pour équation

$$3a_{22}x_1 + 2a_{12}x_2 = 0$$

et ne peut se confondre avec Ω, $x_2 = 0$, sans que a_{22} ne devienne zéro et a un couple de droites.

La seconde hypothèse est inadmissible. La conique $\mathfrak{a}$ passe par ω' et touche Ω. Alors

$$\mathfrak{a} = 2\mathfrak{a}_{12}x_1x_2 + 2\mathfrak{a}_{23}x_2x_3 + (\mathfrak{a}_1x_1 + \mathfrak{a}_3x_3)^2$$

et, après départ de x_2,

$$\varpi[\mathfrak{a}] = x_2(\mathfrak{a}_1x_1 + \mathfrak{a}_3x_3)^2 + 2x_1^2(\mathfrak{a}_{21}x_1 + \mathfrak{a}_{23}x_3) = 0.$$

Appelons δ la droite

$$\mathfrak{a}_1x_1 + \mathfrak{a}_3x_3 = 0.$$

La cubique $\varpi[\mathfrak{a}]$ aura (ω', δ) pour élément de rebroussement, et la cubique $E\varpi[\mathfrak{a}] = \varpi[a]$ aura $E[(\omega', \delta)]$ pour élément d'inflexion. La droite $E[\omega']$

$$ex_2 + x_3 = 0$$

coupera $\varpi[a]$ en trois points confondus.

Faisons, dans $\varpi[a]$, $x_3 = -ex_2$; la forme binaire

$$a_{22}x_1^3 + 2a_{12}x_1^2x_2 + a_{11}x_1x_2^2 - 2ea_{13}x_2^3,$$

égalée à zéro, doit représenter trois fois la ligne inflexionnelle ϖi

$$3a_{22}x_1 + 2a_{12}x_2 = 0$$

de $\varpi[a]$. On a ainsi, λ facteur à déterminer,

$$\lambda(a_{22}x_1^3 + 2a_{12}x_1^2x_2 + a_{11}x_1x_2^2 - 2ea_{13}x_2^3) = (3a_{22}x_1 + 2a_{12}x_2)^3.$$

L'identification donne

$$(0) \quad \lambda = 27a_{22}^3, \qquad 4a_{12}^2 = 3a_{11}a_{22}, \qquad 4a_{12}^3 = -27ea_{22}^2a_{13}.$$

Mais $a = C_p^{\sigma' m}$, donc les coefficients des puissances des x_i dans a sont des fonctions rationnelles et quadratiques des y_i.

Si a_{12} est identiquement zéro, le système (0) donne, puisque a_{22} ne peut être zéro sans que a ne dégénère en couples de droites,

$$a_{11} = a_{13} = 0. \qquad a = a_{22}x_2^2,$$

ce qui est absurde.

Si a_{12} est une forme quadratique indécomposable en y_i, le système (0) montre que a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22} ne diffèrent que par des coefficients constants, et l'équation $a = 0$, qui est la primordiale puncto-ponctuelle de $\sigma' m$, serait de dimension zéro en y_i, ce qui est absurde.

Si enfin on a $a_{12} = \lambda\binom{1}{y}\mu\binom{1}{y}$, le système (0) devient

$$4\lambda^2\mu^2 = 3a_{11}a_{22}, \qquad 4\lambda^3\mu^3 = -27ea_{22}^2a_{13}.$$

Si a_{11} ne diffère de $\lambda\mu = a_{12}$ que par une constante-coefficient, on

retombe sur la discussion précédente. Si

$$a_{11} = \alpha\lambda^2, \qquad a_{22} = \beta\mu^2 \qquad (\alpha, \beta = \text{const.})$$

et

$$4\lambda^3\mu^3 = -27e\beta^2\mu^4 a_{13},$$

les facteurs λ et μ ne diffèrent que par un coefficient constant, ainsi que diffèrent aussi entre elles les fonctions $a_{11}, a_{22}, a_{13}, a_{12}$, ce qui est absurde.

La quatrième hypothèse est inadmissible.

On démontrera, comme plus haut, pour la seconde hypothèse, que la droite $E[\omega']$, c'est-à-dire

$$ex_2 + x_3 = 0,$$

est la tangente d'inflexion de

$$\varpi[a] = x_2(a_1x_1 + a_3x_3)^2 + 2x_1^2(a_{21}x_1 + a_{23}x_3) = 0,$$

puisque a touche Ω et passe par ω',

$$a = (a_1x_1 + a_3x_3)^2 + 2a_{21}x_2x_1 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

On s'assure aisément que la ligne qui joint ω' au point d'inflexion de $\varpi[a]$ a pour équation, en posant

$$\alpha = 2a_1a_{23} - 3a_3a_{21},$$
$$\alpha x_1 - a_3a_{23}x_3 = 0.$$

On ne peut avoir $e = 0$, car la tangente d'inflexion ne peut passer par ω'; on tire de $ex_2 + x_3 = 0$, $x_2 = e^{-1}x_3$, et alors il faut avoir l'identité

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha x_1 - a_3a_{23}x_3)^3 \\ = 2ea_{21}x_1^3 + x_1^2x_3(2ea_{23} - a_1^2) - 2a_1a_3x_1x_3^2 - a_3^2x_3^3,\end{aligned}$$

qui indique que $ex_2 + x_3 = 0$ coupe $\varpi[a]$ trois fois au point où $\varpi[a]$ est rencontré par $\alpha x_1 - a_3a_{23}x_3 = 0$.

On ne peut avoir $a_{23} = 0$ identiquement, car ω serait un point d'inflexion, tandis que ω n'est pas situé sur $ex_2 + x_3 = 0$. L'identification

donne alors

$$\mathfrak{b}\alpha^3 = 2ea_{24},$$
$$-3\mathfrak{b}\alpha^2 a_3 a_{23} = 2ea_{23} - a_1^2,$$
$$3\mathfrak{b}\alpha a_3^2 a_{23}^2 = -2a_1 a_3,$$
$$-\mathfrak{b}a_3^3 a_{23}^3 = -a_3^2.$$

Il vient

$$\mathfrak{b} = a_3^{-1} a_{23}^{-3},$$

d'où le système des deux relations distinctes seulement

$$(o') \qquad o = 4a_1^3 + 27ea_3 a_{24} \qquad \text{et} \qquad a_1^2 + 6ea_{23} = o.$$

Mais $a = C_p^{\sigma' m}$; les coefficients des puissances des x_i dans a sont des fonctions rationnelles et quadratiques des y_i et

$$a_1, a_3 = \text{formes linéaires en } y_i,$$
$$a_{24}, a_{23} = \text{formes quadratiques en } y_i.$$

Le système (o') montre alors, en désignant par p une forme linéaire en y_i, et par b_1, b_3, c_1, c_3 des constantes, que l'on a

$$a_1 = b_1 p, \qquad a_3 = b_3 p, \qquad a_{24} = c_1 p^2, \qquad a_{23} = c_3 p^2,$$
$$a = p^2\{(b_1 x_1 + b_3 x_3)^2 + c_1 x_1 x_2 + c_3 x_3 x_2\} = o.$$

La primordiale puncto-ponctuelle de $\sigma' m$ ne contiendrait plus y_i, ce qui est absurde. L'hypothèse quatrième est donc inadmissible.

20. *Hypothèse III.* — On a

$$k = k' = n = n' = 2;$$

$\varpi[a]$ et $\varpi[\mathfrak{a}]$ sont des coniques. Si la linéaire m n'est pas tautofocale, a ne peut adhérer au focal; $\mathfrak{a}$ ne peut y adhérer non plus, car a y adhérerait aussi dans ce cas en vertu de ce que $E\varpi[a] = \varpi[\mathfrak{a}]$. Comme $\varpi[a]$ et $\varpi[\mathfrak{a}]$ sont deux coniques, a et $\mathfrak{a}$ doivent passer à la fois par ω et par ω', $\varpi[a]$ et $\varpi[\mathfrak{a}]$ passent aussi par ω et par ω'. La conique $E\varpi[a]$ touche $E[\omega] = \Omega$, puisque $\varpi[a]$ passe par ω, et comme

$E\varpi[a] = \varpi[\mathfrak{a}]$, $\varpi[\mathfrak{a}]$ adhérerait au focal, ce qui est absurde; il faut ainsi que m soit tautofocal, ainsi que Σ.

Il ressort des n^{os} **17** à **20** la proposition :

21. Théorème. — *Pour que la substitution crémonienne*

$$\Sigma = \sigma' m \varpi E \varpi$$

soit quadratique, il faut et il suffit que f soit tautofocal; Σ est aussi tautofocal.

La condition est nécessaire, en vertu de ce qui précède. Si elle est remplie, $a = C_p^{\sigma' m}$ adhère au focal; $\varpi[a]$, $E\varpi[a]$ et enfin

$$\varpi E \varpi[a] = \mathfrak{a} = C_p^{\Sigma}$$

y adhèrent aussi et sont des coniques. Enfin, on peut raisonner sur $C_l^{\sigma' m}$ et C_l^{Σ} comme on vient de le faire sur $C_p^{\sigma' m}$ et C_p^{Σ}. La condition est donc suffisante.

TROISIÈME PARTIE.

PRODUIT D'UNE CRÉMONIENNE PAR LES DEUX CANONIQUES ξ ET π.

22. Nous reportant au n° **11**, on voit que, pour étudier les conditions qui rendent crémonienne quadratique le produit $s's$ de deux crémoniennes équivalentes l'une et l'autre à ξ ou à π, il suffit d'étudier les produits

$$\Sigma = \xi m \xi, \quad \xi m \pi, \quad \pi m \xi \qquad \text{ou} \qquad \pi m \pi, \quad m = \text{linéaire},$$

ou simplement les produits

$$\Sigma = \xi m \xi, \quad \pi m \xi \qquad \text{ou} \qquad \pi m \pi,$$

puisque le produit de forme $\xi m \pi$ a pour inverse un produit de forme $\pi m \xi$ et que les dimensions des variables sont les mêmes dans une crémonienne et son inverse.

Il convient tout d'abord d'approfondir l'étude faite dans le premier Mémoire sur les éléments fondamentaux de ξ et de π.

23. Les éléments fondamentaux de ξ adhèrent, comme on sait, à ω, Ω, A ou $\mathfrak{A}_\xi$,

$$A = x_1^2 - x_2 x_3, \qquad \mathfrak{A}_\xi = A - K^2 x_2^2 = 0.$$

Lemme I. — *A un élément fondamental* (ω, u), ξ *fait correspondre* tous *les* ∞ *éléments adhérents à* A.

Considérons $P_{pp}^\xi = 0$, en désignant, d'une façon générale, par P_{pp}^s, P_{lp}^s, $P_{pl}^s, \ldots = 0$ les primordiales puncto-ponctuelle, linéo-ponctuelle, puncto-linéaire, etc., d'une crémonienne s. On a (premier Mémoire)

$$P_{pp}^\xi = f(x, y) = AB - K^2 R^2 = 0,$$
$$R = x_2 y_1 - x_1 y_2.$$

L'élément $(y, v) = \xi[(x, u)]$ est, en général, comme on sait, l'élément autre que le focal, adhérent aux deux coniques

$$f(\underline{x}, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_i dx_i \frac{\partial f(\underline{x}, y)}{\partial x_i} = 0$$

avec

$$\sum_i u_i dx_i = 0.$$

Si $(x, u) = (\omega, u)$, la conique $f(\underline{x}, y) = 0$ s'évanouit et la conique

$$\sum_i dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

se réduit à

$$B\, dA = 0,$$

puisque $x_1 = x_2 = 0$. Comme $u \neq \Omega$ par hypothèse, $dA \neq 0$ et $B = 0 = y_1^2 - y_2 y_3 = 0$. Par suite, à un élément (ω, u) correspondent tous les ∞ éléments adhérents à A. C. Q. F. D.

LEMME II. — *A un élément fondamental* (x, Ω) ξ *fait correspondre tous les éléments en nombre* ∞ *adhérents à la conique* $\mathfrak{A}_\xi$.

Reprenons les deux coniques précédentes

$$AB - K^2R^2 = 0,$$
$$dA.B - 2K^2 R dR = 0$$

avec

$$\sum_i u_i dx_i = \sum_i x_i du_i = 0.$$

Si $(x, u) = (x, \Omega)$, $u_1 = x_2 = u_3 = dx_2 = 0$, et alors les deux coniques se réduisent à

$$x_1^2(B - K^2 y_2^2) = 0, \qquad 2x_1 dx_1(B - K^2 y_2^2) = 0.$$

L'élément (y, c) est donc l'un quelconque des ∞ éléments adhérents à $\mathfrak{A}_\xi$. C. Q. F. D.

LEMME III. — *A un élément fondamental* (x, u) *adhérent à* A, ξ *fait correspondre les* ∞ *éléments adhérents à la droite* $\overline{\omega x}$.

Nos deux coniques précédentes

$$AB - K^2R^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad dA.B - 2K^2 R\, dR = 0$$

se réduisent, puisque $A = dA = 0$, à

$$R^2 = 0, \qquad R\, dR = 0:$$

(y, c) est l'un quelconque des ∞ éléments adhérents à la droite $\overline{\omega x}$.

$$R = \underline{x}_2 y_1 - \underline{x}_1 y_2 = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

LEMME IV. — *A un élément fondamental* (x, u) *adhérent à* $\mathfrak{A}_\xi$, ξ *fait correspondre les* ∞ *éléments adhérents au point de coordonnées* x_2, 0, $2x$, *de* Ω.

Considérons la conique

$$P_{pl}^{\xi} = B'\mathfrak{A}_{\xi} - K^2\mathfrak{U}^2 = F(\underline{x}, v) = 0,$$
$$B' = v_1^2 - 4v_2v_3, \qquad \mathfrak{U} = x_2v_1 + 2x_1v_3.$$

L'élément (y, v) sera l'élément autre que le focal adhérent à la fois aux deux coniques

$$(1) \qquad F(\underline{x}, v) = B'\mathfrak{A}_{\xi} - K^2\mathfrak{U}^2 = 0$$

et

$$(2) \qquad F(\underline{x + dx}, v) = B'd\mathfrak{A}_{\xi} - 2K^2\mathfrak{U}\,d\mathfrak{U} = 0,$$
$$\sum_i u_i\,dx_i = \sum_i x_i\,du_i = 0.$$

Si (x, u) adhère à $\mathfrak{A}_{\xi}$, $\mathfrak{A}_{\xi} = d\mathfrak{A}_{\xi} = 0$, les coniques (1) et (2) se réduisent à

$$\mathfrak{U}^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{U}\,d\mathfrak{U} = 0.$$

v_i satisfait seulement à

$$\mathfrak{U} = \underline{x}_2v_1 + 2\underline{x}_1v_3 = 0;$$

(y, v) est l'un quelconque des ∞ éléments adhérents au point de coordonnées

$$x_2, \quad 0, \quad 2x_1$$

situé sur Ω.

24. Passons à l'étude des éléments fondamentaux de π qui adhèrent, comme on sait, à ω, Ω, A et $\mathfrak{A}_{\pi} = A - K^2x_1^2 = 0$.

Lemme I. — *A un élément fondamental* (ω, u) *ou* (x, Ω), π *fait correspondre tous les* ∞ *éléments adhérents respectivement à* A *ou à* $\mathfrak{A}_{\pi}$.

Ce lemme se démontre comme les lemmes I et II du n° **23**.

Lemme II. — *A un élément fondamental* (x, u) *adhérent à* A,

π fait correspondre tous les ∞ éléments adhérents à la droite issue de ω, qui a pour coordonnées x_1, x_2 et 0.

Soit la conique

$$f(\underline{x}, y) = P_{pp}^{\pi} = AB - K^2R^2 = 0,$$
$$R = x_1y_1 + x_2y_2.$$

L'élément (y, v) doit adhérer à la fois à

$$f(\underline{x}, y) = 0 \qquad \text{et à} \qquad f(\underline{x + dx}, y) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad AB - K^2R^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad dAB - 2K^2R\,dR = 0.$$

Si (x, u) adhère à A, on a

$$A = dA = 0;$$

les deux coniques (1) ont en commun la droite

$$R = \underline{x}_1y_1 + \underline{x}_2y_2 = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Lemme III. — *A un élément fondamental (x, u) adhérent à $\mathfrak{A}_\pi$, π fait correspondre tous les ∞ éléments adhérents au point situé sur Ω qui a pour coordonnées x_1, 0 et $-2x_2$.*

Considérons la conique

$$F(\underline{x}, v) = P_{pl}^{\pi} = B'\mathfrak{A}_\pi + K^2R^2 = 0,$$
$$B' = v_1^2 - 4v_2v_3, \qquad \mathfrak{R} = x_1v_1 - 2x_2v_3.$$

L'élément (y, v) adhère aux deux coniques

$$(1) \qquad F(\underline{x}, v) = 0 \qquad \text{et} \qquad F(\underline{x + dx}, v) = 0.$$

Si (x, u) adhère à $\mathfrak{A}_\pi$, $\mathfrak{A}_\pi = d\mathfrak{A}_\pi = 0$, les deux coniques (1) ont en

commun le point

$$\mathfrak{U} = \underline{x}_1 c_1 - 2\underline{x}_2 c_3 = 0,$$

situé sur Ω et de coordonnées x_1, 0 et $-2x_2$. C. Q. F. D.

Nous pouvons aborder maintenant l'étude des produits

$$\xi m \xi, \quad \pi m \xi, \quad \pi m \pi.$$

25. Lemme. — *Soit a une conique, l'ordre et la classe des courbes $\xi[a]$ et $\pi[a]$ sont huit.*

Cherchons, par exemple, l'équation de $\xi[a]$ en coordonnées points z_i, en posant

$$a = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_{ij} = 0.$$

Si le point z de coordonnées z_i est sur $\xi[a]$, c'est qu'il a un adhérent commun avec $\xi[a]$; donc les coniques $\xi[z]$ et a ont un adhérent commun, c'est-à-dire sont tangentes; l'équation de $\xi[a]$ en coordonnées-points z_i est donc le tactinvariant des deux coniques a et

$$\xi[z] = P^{\xi}_{pp} = A(x)B(\underline{z}) - K^2(x_2\underline{z}_1 - x_1\underline{z}_2)^2 = 0;$$

de ce tactinvariant $\Delta(z)$ pourra se séparer, d'ailleurs, un certain nombre de fois le facteur $B(z)$; car, si $B = 0$, $\xi[z]$ est une droite double, tangente à une courbe quelconque et, en particulier, à a. Le tactinvariant cherché est le discriminant de la forme cubique binaire en λ_1, λ_2, déterminant de la conique

$$\lambda_1 \xi[z] + \lambda_2 a = 0.$$

On trouve, en faisant le calcul, que le tactinvariant $\Delta(z)$ est d'ordre huit en z_i après départ du facteur B^2, ce qui était prévu. L'ordre de $\xi[a]$ est donc huit.

Cherchons l'équation de $\xi[a]$ en coordonnées-lignes w_i. On voit, comme plus haut, qu'il faut chercher le tactinvariant des deux coniques a et (*voir* n° **25**, lemme IV)

$$\xi[w] = B'(\underline{w})\mathfrak{A}_\xi(x) - K^2\mathfrak{U}^2 = P^{\xi}_{lp} = 0,$$

où

$$\mathfrak{U} = x_2 \underline{w}_1 + 2x_1 \underline{w}_3.$$

Il pourra encore se séparer du résultat le facteur

$$B'(w) = w_1^2 - 4w_2 w_3$$

une ou plusieurs fois, car, si $B' = 0$, $\xi[w]$ se réduit à une droite double et est tangente à a, comme à toute autre courbe du plan. Nous chercherons encore le discriminant $\delta(w)$ de la forme binaire cubique en λ_1, λ_2 déterminant de la conique

$$\lambda_1 \xi[w] + \lambda_2 a = 0,$$

et nous trouverons par un calcul aisé que, après départ prévu du facteur B'^2, les w_i figurent dans $\delta(w)$ à la dimension huit.

Raisonnant de même façon que pour ξ, sur la canonique π, on achèvera la démonstration du lemme.

26. Supposons que la conique a *n'adhère pas au focal* et que l'ordre ou la classe de $\xi[a]$ soient moindres que huit; cela exige qu'il se sépare de $\xi[a]$ des courbes $c, c', c'', \ldots$. Je dis que ces courbes ne peuvent être que les coniques A ou $\mathfrak{A}_\xi$, des droites issues de ω ou des points situés sur Ω.

Prenons, par exemple, la courbe c, (y, v) un de ses ∞ adhérents; l'élément $\xi[(y, v)]$ ne peut occuper sur a qu'un nombre fini de positions, tandis que (y, v) parcourt toute la courbe c. Si, en effet, $\xi[(y, v)]$ occupe sur la conique a un nombre ∞ de positions, il parcourt toute la conique a, qui est indécomposable. Soit (x, u) un adhérent de a; tandis que (x, u) parcourt a, $\xi[(x, u)]$ devrait parcourir à la fois la courbe c et aussi la courbe restante de $\xi[a]$ après séparation de la courbe c. Cela est absurde, puisque $\xi[(x, u)]$ est unique.

Ainsi aux ∞ éléments adhérents à $c, c', c'', \ldots$, ξ fait correspondre un *nombre fini* d'éléments adhérents à a. Soit (x, u) un de ces éléments en nombre fini; ξ fait correspondre à (x, u) un nombre ∞ d'éléments, adhérents à c, ou c', ou c'', ...; (x, u) sera donc un élément *fondamental* de ξ, c'est-à-dire (**23**) :

Un élément (ω, u), et il se sépare de $\xi[a]$ la conique A (**23**,

lemme I); il ne peut se séparer A^2, car la conique a ne peut passer qu'*une* fois par ω, et n'y touche pas Ω, par hypothèse;

Un élément (x, Ω), et il se sépare de $\xi[a]$ la conique $\mathfrak{A}_\xi$, sans qu'il puisse se séparer $\mathfrak{A}_\xi^2$ (**23**, lemme II), car a ne peut toucher Ω qu'*une* fois;

Un élément adhérent à A, et il se sépare de $\xi[a]$ une droite d issue de ω (**23**, lemme III); il ne peut se séparer de $\xi[a]$ plus de deux pareilles droites, car deux coniques ne peuvent avoir plus de *deux* adhérents communs, sans coïncider, tandis que a et A ne coïncident pas;

Un élément adhérent à $\mathfrak{A}_\xi$, et il se sépare de $\xi[a]$ un point p situé sur Ω (**23**, lemme IV); il ne peut se séparer de $\xi[a]$ plus de deux pareils points, car les deux coniques a et $\mathfrak{A}_\xi$ ne sauraient avoir plus de deux adhérents communs sans coïncider.

On voit ainsi que les courbes c, c', c'' ne peuvent être que A, $\mathfrak{A}_\xi$, des droites issues de ω, des points situés sur Ω.

27. Raisonnant sur π comme on vient de le faire sur ξ, et faisant usage des lemmes du n° **24**, on s'assure aisément des propriétés suivantes :

Il peut se séparer de $\pi[a]$:

La conique A, si a passe par ω;

La conique $\mathfrak{A}_\pi$, si a touche Ω;

Une ou deux droites issues de ω, si a touche une ou deux fois A;

Un ou deux points situés sur Ω, si a touche une ou deux fois $\mathfrak{A}_\pi$.

28. Théorème. — *Si la conique a n'adhère pas au focal, $\xi[a]$ ne peut être une conique.*

Soit $\Delta\left(\overset{s}{x}\right) = 0$ et $\delta\left(\overset{s}{u}\right) = 0$ les équations (**26**) de $\xi[a]$ en coordonnées-lignes et coordonnées-points. Comme a ne peut à la fois toucher Ω et passer par ω, il ne peut se séparer au plus de $\Delta\left(\overset{s}{x}\right)$ que le facteur quadratique A, ou $\mathfrak{A}_\xi$, et deux facteurs linéaires en x_1, x_2 si a touche deux fois A; $\xi[a]$ est ainsi d'ordre quatre au moins et n'est pas une conique.

On démontrera d'une façon identique le théorème analogue pour π.

29. Théorème. — *Pour que le produit*

$$\xi m \xi, \quad \xi m \pi, \quad \pi m \xi \quad \text{ou} \quad \pi m \pi$$

soit quadratique, il faut et il suffit que m soit tautofocale.

Appelons Σ la substitution, quadratique par hypothèse,

$$\Sigma = \xi m \xi, \quad \xi m \pi, \quad \pi m \xi \quad \text{ou} \quad \pi m \pi,$$

et posons

$$a = C_p^{\xi m} \quad \text{ou} \quad C_p^{\pi m}.$$

La canonique ξ, ou π suivant le cas, doit transformer a en la conique C_p^{Σ}; cela exige (**28**) que a adhère au focal; mais a adhère à $m^{-1}[(\omega, \Omega)]$ et m doit être tautofocale.

Il faut montrer maintenant que ξ et π transforment une conique adhérente au focal en une conique possédant la même propriété.

Soit

$$0 = a = 2a_{23}x_2x_3 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

une pareille conique.

Formons (**26**) le tactinvariant de a et de la conique

$$C_p^{\xi} = A(x)B(\underline{z}) - K^2(x_2z_1 - x_1\underline{z}_2)^2 = 0.$$

Ces deux coniques, qui se touchent déjà au focal, doivent se toucher en un autre point encore.

La forme quadratique binaire en x_1, x_2

$$\begin{vmatrix} 2a_{23} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ -B & (B - K^2z_2^2)x_1^2 + 2z_1z_2K^2x_1x_2 - K^2z_1^2x_2^2 \end{vmatrix}$$

donne, égalée à zéro, le produit des deux droites qui joignent ω aux deux points d'intersection de a et de C_p^{ξ}. Cette forme doit être carré parfait et son discriminant nul; cela exige

$$(1) \quad 0 = \begin{vmatrix} 2a_{23} & a_{12} \\ -B & K^2z_1z_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} 2a_{23} & a_{11} \\ -B & B - K^2z_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2a_{23} & a_{22} \\ -B & -Kz_1^2 \end{vmatrix},$$

équation de dimension 4 en z_i; mais, pour $B = 0$, (1) est identiquement zéro,

$$4K^4 a_{23}^2 z_1^2 z_2^2 - 4K^4 a_{23}^2 z_1^2 z_2^2;$$

après départ du facteur quadratique B, (1) représente une conique adhérente au focal.

La démonstration pour π est la même que pour ξ.

QUATRIÈME PARTIE.

PRODUITS DE CRÉMONIENNES ET DE CRÉMONIQUES.

50. Je vais étudier le produit d'une crémonienne par une crémonique, au point de vue des dimensions avec lesquelles les variables figurent dans ce produit. Il suffira d'ailleurs (**11**) d'étudier à ce point de vue les trois produits

$$\Sigma = \sigma m \zeta, \quad \sigma m \varpi, \quad \sigma m \rho,$$

$$m = \text{linéaire},$$

$$\sigma = \pi, \quad \xi, \quad \rho H \rho, \quad \rho E \varpi, \quad \varpi E \rho \quad \text{ou} \quad \varpi E \varpi.$$

Lemme. — *Le produit $\sigma m \zeta$ ne peut être quadratique, c'est-à-dire contenir les variables à des dimensions au plus égales à deux.*

Posons en effet $a = C_p^{\sigma m}$. La courbe $\zeta[a]$ sera $C_p^{\sigma m \zeta}$; Σ ne peut être linéaire, car

$$\sigma m = \Sigma \zeta$$

et une crémonienne serait équivalente à une crémonique; Σ ne peut être une crémonique, car la crémonienne σm serait à deux composantes crémoniques, dont l'une serait ζ, ce qui est absurde (premier Mémoire). Σ est ainsi forcément une crémonienne et $\zeta[a]$ une conique. Cela est possible seulement si a passe par deux des trois points fondamentaux ω, ω', ω'' de ζ, et σ est l'une des deux canoniques $\rho E \varpi$ et $\varpi E \varpi$ (Préliminaires); comme les trois points ω, ω', ω'' jouent dans ζ le même rôle, je puis, sans restreindre la généralité, supposer que a

passe par ω, y ayant une tangente fixe, et par ω'. L'équation de a sera

$$0 = a = P_{pp}^{\sigma m} = a_3 x_3 (k_1 x_1 + k_2 x_2) + a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2,$$

a_3, a_{11}, a_{12} = formes quadratiques en y_i,

$$k_1, \quad k_2 = \text{const.}$$

Il viendra

$$\zeta[a] = a_3 x_1 (k_2 x_1 + k_1 x_2) + a_{11} x_2 x_3 + a_{12} x_1 x_3 = C_p^{\Sigma}.$$

$\zeta[a]$ passe par les deux points fixes ω et ω', Σ est donc équivalente à l'une des deux canoniques $\rho E \varpi$ et $\varpi E \varpi$ et $\zeta[a]$ doit avoir en ω ou en ω' une tangente fixe, ce qui n'est pas.

Le lemme est ainsi démontré.

31. Lemme. — *Pour que le produit $\Sigma = \sigma m \varpi$ soit quadratique, il faut et il suffit que m soit tautofocale.*

Σ n'est pas linéaire, car la crémonique $\Sigma \varpi m^{-1}$ serait identique à la crémonienne σ. Σ est donc crémonienne ou crémonique; dans l'un et l'autre cas la courbe générale de l'un au moins des deux réseaux R_p^{Σ} et R_l^{Σ} est une conique indécomposable. Supposons, par exemple, conique indécomposable

$$\mathfrak{A} = C_p^{\Sigma};$$

posons

$$a = C_p^{\sigma m}, \qquad \text{d'où} \qquad \varpi[a] = \mathfrak{A}.$$

Si m n'est pas tautofocale, a n'adhère pas au focal; $\varpi[a] = \mathfrak{A}$ peut être une conique seulement si a passe par ω et par ω'; cela exige que $\sigma = \rho E \varpi$ ou $\varpi E \varpi$ et a a en ω' une tangente fixe. Alors

$$0 = a = C_p^{\sigma m} = P_{pp}^{\sigma m} = 2 a_2 (k_1 x_1 + k_3 x_3) x_2 + a_{11} x_1^2 + 2 a_{13} x_1 x_3,$$

a_2, a_{11}, a_{13} = formes quadratiques en y_i,

$$k_1, \quad k_3 = \text{const.}$$

Il vient

$$\varpi[a] = \mathfrak{A} = 2 a_2 x_1 (k_1 x_1 + k_3 x_3) + a_{11} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_2 x_3.$$

$\mathfrak{A} = C_p^{\Sigma}$ passe par les deux points fixes ω et ω', ce qui exige que Σ soit équivalente à l'une des trois canoniques ϖ, $\rho E \varpi$ ou $\varpi E \varpi$ et $\mathfrak{A}$ doit avoir en ω ou en ω' une tangente fixe; cela n'est pas.

Il est absurde ainsi de supposer m non tautofocale; si au contraire m est tautofocale, a adhère au focal et $\mathfrak{A}$ jouit de la même propriété et est une conique.

Le lemme est démontré.

32. Pour que le produit $\Sigma = \sigma m \rho$ soit quadratique, il faut et il suffit que m soit tautofocale.

Conservons les notations précédentes (**31**); $\mathfrak{A} = \rho[a]$ et ne pourra être une conique que si a adhère au focal, et la démonstration s'achève comme pour le lemme précédent.

33. Étudions maintenant, au point de vue des dimensions avec lesquelles entrent les variables, le produit de deux crémoniques. Il suffira encore (**11**) d'étudier les produits

$$\Sigma = \sigma m \zeta, \qquad \sigma m \varpi, \quad \sigma m \rho,$$
$$m = \text{linéaire}, \qquad \sigma = \zeta, \quad \rho \quad \text{ou} \quad \varpi.$$

Si m est monistique, il faut et il suffit, pour que Σ soit quadratique, que σm ait avec ζ, ρ ou ϖ suivant le cas deux points fondamentaux communs. Cela résulte de mes recherches sur les groupes quadratiques Cremona (*Journal de Mathématiques*, 1885).

Si m est dualistique, la conique $C_l^{\sigma m}$ touchera les trois droites

$$m^{-1}[\omega], \quad m^{-1}[\omega'], \quad m^{-1}[\omega''], \qquad \text{si} \qquad \sigma = \zeta;$$

adhérera à $m^{-1}[(\omega, \Omega)]$ et touchera la droite

$$m^{-1}[\omega'], \qquad \text{si} \qquad \sigma = \varpi;$$

adhérera à $m^{-1}[(\omega, \Omega)]$ et n'aura aucun point et aucune tangente fixes autres que $m^{-1}[\omega]$ et $m^{-1}[\Omega]$.

Il résulte de là que $\sigma m \zeta$ n'est jamais quadratique si m est dualistique; dans le même cas $\sigma m \varpi$ et $\sigma m \rho$ ne peuvent être quadratiques

que si m est tautofocale. Il est évident aussi que, pour m dualistique, $\sigma \neq \zeta$.

33. Il est aussi bien aisé de voir à quelles conditions le produit de deux crémoniennes est crémonique quadratique.

Il suffira (**11**) d'étudier à quelles conditions on a

$$(\circ) \qquad \sigma' m \sigma = \tau,$$

σ', σ = une des six canoniques crémoniennes, τ = crémonique quadratique.

De ($\circ$) on tire

$$\sigma' m = \tau\sigma;$$

posons $\tau = \alpha\tau_0\beta$, α, β = linéaires, $\tau_0 = \rho$ ou ϖ ou ζ.

Le produit $\tau\sigma$ étant une crémonienne $\sigma' m$, $\tau_0 \neq \zeta$ (lemme du n° **30**) et β est tautofocale (lemme des n^{os} **31** et **32**).

$C_p^{\tau\sigma}$ adhère au focal et $C_p^{\sigma' m}$ adhère à l'élément $m^{-1}[(\omega, \Omega)]$, donc

$$m^{-1}[(\omega, \Omega)] = (\omega, \Omega)$$

et m est tautofocale, donc :

Lemme. — *Pour que le produit $\sigma' m \sigma$ soit une crémonique quadratique, m doit être tautofocale.*

34. Il est inutile d'examiner le produit d'une crémonique par une crémonienne. En effet, la discussion se ramène (**11**) à celle du produit

$$\tau m \sigma,$$

$\tau = \zeta, \rho, \varpi$, σ = une des six crémoniennes canoniques.

Or

$$(\tau m \sigma)^{-1} = \sigma m^{-1} \tau$$

et on est ramené aux n^{os} **30** à **33**; m doit être tautofocale, $\tau \neq \zeta$.

Enfin il est facile de se rendre compte de ce qui se passe quand le produit d'une substitution quadratique crémonienne ou crémonique par une autre substitution quadratique crémonienne ou crémonique

est linéaire. Se reportant au n° **11**, on voit qu'il suffit de voir ce qui se passe quand le produit $\sigma' m \sigma$ est linéaire et $= \lambda$.

σ', $\sigma =$ une des six canoniques crémoniennes ou des trois canoniques crémoniques

$$\zeta, \quad \rho, \quad \varpi:$$

$m =$ linéaire.

On voit que σ' est équivalent à σ; λ et m sont tautofocales.

CINQUIÈME PARTIE.

CONSTRUCTION DES GROUPES QUADRATIQUES CRÉMONIENS; GROUPE DIRECTEUR.

35. Nous sommes actuellement, après une discussion un peu méticuleuse à cause du grand nombre de cas à examiner, en possession de toutes les propositions nécessaires pour procéder à la construction d'un groupe quadratique crémonien G, dérivé de crémoniennes

$$\begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(\overset{a}{x}, \overset{b}{u}) \\ u_i & \psi_i(\overset{c}{x}, \overset{d}{u}) \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix},$$

$$a, \quad b, \quad c, \quad d \leqq 2,$$

et pouvant contenir par suite :

(I) des linéaires monistiques $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$ ou dualistiques $\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$,

(II) des crémoniques

$$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

(III) des crémoniennes proprement dites

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix}.$$

36. Si G manque de crémoniennes et de crémoniques, il est l'un des groupes linéaires de contact, construits par moi ailleurs (*Journal de Mathématiques*, 1887).

Supposons G dépourvu de crémoniennes et soit l une crémonique de G.

$$l = \alpha\tau\beta,$$

$$\tau = \zeta \quad \varpi, \quad \text{ou} \quad \rho; \quad \alpha, \beta = \text{linéaires}.$$

On peut, en transformant au besoin par α toutes les substitutions de G, supposer toujours $l = \tau\lambda$, puisque

$$\alpha^{-1} l \alpha = \tau\beta\alpha = \tau\lambda.$$

Soit maintenant $l' = \alpha'\tau'\beta'$ une crémonique de G, distincte ou non de l; si β' est dualistique, elle doit être tautofocale (**35**) pour que $l'l$ soit quadratique. Il suffit de se reporter à la construction dans le premier Mémoire des crémoniennes à deux composantes crémoniques pour voir que

$$l'l = \alpha'\tau'\beta\tau\lambda$$

est une crémonienne équivalente à

$$\rho H \rho, \quad \rho E \varpi, \quad \varpi E \rho \quad \text{ou} \quad \varpi E \varpi;$$

or G est dépourvu de crémoniennes par hypothèse, et β' ne peut être dualistique.

Il résulte de là que λ', α', β', ... sont monistiques. Une linéaire l de G est aussi monistique, car on aurait, dans le cas contraire, dans G, la substitution

$$\alpha'\tau\beta' l,$$

et $\beta' l$ est dualistique.

Les substitutions de G sont donc toutes de la forme $\alpha\tau\beta$, où α, β = monistiques; $\tau = 1, \rho, \varpi$ ou ζ; en d'autres termes, G est l'un des groupes quadratiques Cremona déjà construits par moi ailleurs.

37. Si G est pourvu de crémoniennes, soit (**36**) $\sigma\lambda$ l'une d'elles, où λ = linéaire, σ = une des six canoniques crémoniennes.

Lemme I. — *La linéaire λ est tautofocale.*

Cela est évident, si $(\sigma\lambda)^2 = \sigma\lambda\sigma\lambda$ est crémonienne ou crémonique, en vertu des deuxième et troisième Parties et de (**53** et **54**). Supposons $(\sigma\lambda)^2$ linéaire et égal à Λ. On aura

$$\sigma\lambda\sigma\lambda = \Lambda \qquad \text{et} \qquad \sigma\lambda = \Lambda\lambda^{-1}\sigma = \Sigma.$$

C_p adhère au focal, puisque $\Sigma = \sigma\lambda$, et, par suite, $\lambda^{-1} =$ tautofocale. C_p^{Σ} adhère au focal, puisque $\Sigma = \Lambda\lambda^{-1}\sigma$: donc λ est tautofocale. Λ est aussi tautofocale.

Lemme II. — *Toute linéaire de G est tautofocale.*

Soient $\sigma\lambda$ la crémonienne de G considérée plus haut; L une linéaire de G. La crémonienne $\sigma\lambda L$ figurera dans G, et λL doit être tautofocale comme λ, ce qui exige que L soit tautofocale.

Théorème. — *Toute substitution de G doit être de la forme*

$$s = \alpha\sigma'\beta,$$

où α et β désignent des linéaires tautofocales, et σ' l'une des huit substitutions canoniques

$$\varpi, \quad \rho, \quad \rho H \rho \quad \rho E \varpi, \quad \varpi E \rho, \quad \varpi E \varpi, \quad \pi, \quad \xi$$

ou la substitution unité.

Le théorème est évident si s est linéaire. Il est évident aussi, en vertu de ce qui précède, si le produit $s\sigma\lambda$ et $s^{-1}\sigma\lambda$ est crémonienne ou crémonique. Si le produit $s\sigma\lambda$ est une linéaire Λ, on aura

$$s\sigma\lambda = \Lambda = \alpha\sigma'\beta\sigma\lambda,$$
$$\sigma'\beta = \alpha^{-1}\Lambda\lambda^{-1}\sigma.$$

Raisonnant comme pour le lemme précédent, on voit que β est tautofocale, ainsi que la linéaire $\alpha^{-1}\Lambda\lambda^{-1}$. Comme λ et Λ sont tautofocales en vertu des deux lemmes précédents, α est aussi tautofocale.

Il est évident d'ailleurs (**50**) qu'aucune crémonique de G ne peut être équivalente à la canonique ζ. C. Q. F. D.

Comme les six canoniques crémoniennes s'obtiennent (premier Mémoire) en combinant ρ et ϖ avec les tautofocales H, E, e, k, k', comme une tautofocale dualistique est le produit par e d'une monistique de la forme l (**15**), on peut formuler ainsi le théorème précédent :

38. Théorème. — *On obtient une substitution quelconque de G en combinant convenablement ensemble les substitutions ρ, ϖ, e avec des monistiques l de la forme*

$$l = \left| \begin{array}{cc} x_1 & l_1 x_1 + l'_3 x_2 \\ x_2 & l_2 x_2 \\ x_3 & l'_2 x_1 + l'_1 x_2 + l_3 x_3 \\ u_1 & l_2 l_3 u_1 - l_2 l'_2 u_3 \\ u_2 & -l_3 l'_3 u_1 + l_1 l_3 u_2 + (l'_2 l'_3 - l_1 l'_1) u_3 \\ u_3 & l_1 l_2 u_3 \end{array} \right| .$$

39. Posons

$$(0) \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_3}, \qquad \frac{u_1}{u_3} = \frac{z_2}{z_4}, \qquad \frac{v_1}{x_2 u_3} = \frac{z_3}{z_3},$$
$$v_1 = x_2 u_2 - x_3 u_3,$$

avec la relation bien connue

$$\sum_i u_i x_i = 0,$$

laquelle indique que l'élément (x, u) est principal.

Des relations (0) on tire (α, β, γ = facteurs de proportionnalité) les deux systèmes d'équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \gamma z_1 = x_1 u_3, \\ \gamma z_2 = x_2 u_1, \\ \gamma z_3 = v_1, \\ \gamma z_4 = x_2 u_3 \end{array} \right.$$

et

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha x_1 = 2z_1z_4, & \beta u_1 = 2z_2z_4, \\ \alpha x_2 = 2z_4^2, & \beta u_2 = -z_1z_2 + z_3z_4, \\ \alpha x_3 = z_1z_2 - z_3z_4; & \beta u_3 = 2z_4^2. \end{cases}$$

Ces équations permettent de passer sans ambiguïté aucune de l'élément principal (x, u) au point z, de coordonnées $z_j (j = 1, 2, 3, 4)$ de l'espace, et réciproquement. On peut appeler z point affixe de l'élément (x, u).

10. Un calcul simple montre que l'on a

$$\rho\left[\frac{z_1}{z_4}\right] = \rho\left[\frac{x_1}{x_2}\right] = \frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_4},$$

$$\rho\left[\frac{u_1}{u_3}\right] = \rho\left[\frac{z_2}{z_4}\right] = -\frac{x_2u_1 + 2x_1u_1}{x_2u_3} = -\frac{z_2 - 2z_1}{z_4},$$

$$\rho\left[\frac{z_3}{z_4}\right] = \rho\left[\frac{r_1}{x_2u_3}\right] = \frac{-r_1}{x_2u_3} = -\frac{z_3}{z_4}.$$

La substitution ρ équivaut entre les quatre variables z_j, en vertu des égalités précédentes, à la substitution *linéaire quaternaire*

$$\rho' = (z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \quad -z_1 \quad 2z_1 + z_2 \quad z_3 \quad -z_4).$$

On verra, de la même façon, que les substitutions ϖ, e, l reviennent entre les quatre variables z_j aux substitutions linéaires

$$\varpi' = \begin{vmatrix} z_1 & z_4 \\ z_2 & z_3 \\ z_3 & z_2 \\ z_4 & z_1 \end{vmatrix}, \qquad e' = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & -z_4 \\ z_4 & z_3 \end{vmatrix},$$

$$l' = \begin{vmatrix} z_1 & l_1^2z_1 + l_1l_3z_4 \\ z_2 & l_2l_3z_2 - l_2l_4z_4 \\ z_3 & -l_1l_2z_1 - l_3l_4z_2 + l_1l_3z_4 + (l_2l_4 - 2l_1l_4)z_4 \\ z_4 & l_1l_2z_4 \end{vmatrix}.$$

41. Tout groupe G dérivé de ρ, ϖ, e, l est évidemment isomorphe au groupe G′, dérivé de la même façon, des linéaires quaternaires ρ', ϖ', e', l'. L'isomorphisme est d'ailleurs holoédrique; car, si une substitution s' de G′ laisse immobile un point quelconque z de l'espace, la substitution s de G laisse immobile, en vertu des relations (2) du n° **39**, un élément principal quelconque (x, u) du plan et $s = 1$.

Soit, d'ailleurs, une substitution s' de G′,

$$\left| z_i \quad T_i \right| = s' = \left| z_i \quad \sum_j a_{ij} z_j \right| \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

a_{ij} = constantes de déterminant $\neq 0$. Il vient

$$s'\left[\frac{z_1}{z_4}\right] = \frac{T_1}{T_4} = \frac{a_{11}x_1u_3 + a_{12}x_2u_1 + a_{13}x_1 + a_{14}x_2u_3}{a_{41}x_1u_3 + a_{42}x_2u_1 + a_{43}x_1 + a_{44}x_2u_3} = s\left[\frac{x_1}{x_2}\right],$$

$$s'\left[\frac{z_2}{z_4}\right] = \frac{T_2}{T_4} = \frac{a_{21}x_1u_3 + \ldots}{a_{41}x_1u_3 + \ldots} = s\left[\frac{u_1}{u_3}\right],$$

$$s'\left[\frac{z_3}{z_4}\right] = \frac{T_3}{T_4} = \frac{a_{31}x_1u_3 + \ldots}{a_{41}x_1u_3 + \ldots} = s\left[\frac{x_1}{x_2u_3}\right],$$

en vertu du système (1) du n° **39**.

Si je pose donc

$$T_i = a_{i1}x_1u_3 + a_{i2}x_2u_1 + a_{i3}x_1 + a_{i4}x_2u_3,$$

on voit que s' a pour correspondante, dans le groupe quadratique crémonien G, la substitution

$$s = \left| \begin{array}{ll} x_1 & 2T_1T_4 \\ x_2 & 2T_4^2 \\ x_3 & -T_1T_2 - T_3T_4 \\ u_1 & 2T_2T_4 \\ u_2 & -T_1T_2 - T_3T_4 \\ u_3 & 2T_4^2 \end{array} \right| .$$

En effet, des relations précédentes on tire

$$\frac{s[x_1]}{s[x_2]} = \frac{T_1}{T_4}, \qquad \frac{s[u_1]}{s[u_3]} = \frac{T_2}{T_4}, \qquad \frac{s[x_1]}{s[x_2u_3]} = \frac{T_3}{T_4},$$

et il suffit de résoudre le système par rapport aux $s[x_i]$ et $s[u_i]$ pour apercevoir la forme de s.

42. Soit s' une linéaire quaternaire quelconque à déterminant $\neq 0$; le procédé précédent donne toujours naissance, appliqué sur s', à une substitution s quadratique par rapport aux deux séries de variables x_i et u_i, mais s, qui est forcément birationnelle (car il suffit, pour avoir s^{-1}, d'opérer sur s'^{-1} au lieu d'opérer sur s'), peut n'être pas de contact.

En effet, s, si elle est de contact, n'altère pas l'équation

$$\sum_i u_i\,dx_i = 0,$$

c'est-à-dire, en tenant compte du système (2) du n° **39**, l'équation

$$(0)\quad \left\{\begin{aligned} &2z_2z_1\,d.(2z_1z_2) + (-z_1z_2 + z_3z_4)\,d.(2z_4^2)\\ &\quad + 2z_4^2\,d.(-z_1z_2 - z_3z_4)\\ &\qquad\qquad = z_2\,dz_1 - z_1\,dz_2 + z_3\,dz_4 - z_4\,dz_3 = 0, \end{aligned}\right.$$

après départ du facteur $2z_4^2$. La linéaire quaternaire s' ne doit donc pas changer l'équation (0). Cette *condition de contact* est d'ailleurs la seule à laquelle soit astreinte s'; car, si elle est remplie, s, qui est déjà quadratique et birationnelle, devient de contact, c'est-à-dire crémonienne.

Les substitutions ρ, ϖ, e, l sont de contact, donc ρ', ϖ', e', l' satisfont à la condition de contact, ce dont on s'assure facilement. En combinant ρ', ϖ', e', l' d'une façon quelconque, on trouve une linéaire s' satisfaisant à la condition de contact, et s fait partie du groupe G dérivé de ρ, ϖ, e, l. On peut donc compléter ainsi l'énoncé du n° **38**.

Théorème. — *On obtient un groupe quadratique crémonien* G *en combinant d'une façon quelconque les substitutions* ρ, ϖ, e, l.

43. Pour que G soit d'ordre fini, il faut et il suffit évidemment que G′ soit d'ordre fini. Je suis ainsi ramené à la construction des groupes linéaires quaternaires d'ordre fini, dont toutes les substitutions satisfont à la condition de contact.

G' est le groupe *directeur* de G. Nous supposons dorénavant G' d'ordre fini, puisque G l'est par hypothèse. Les substitutions de G' seront les *directrices* de celles de G.

SIXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DANS QUELQUES CAS PARTICULIERS DU GROUPE DIRECTEUR.

44. La construction, dans le cas général, du groupe directeur G', relatif à un groupe quadratique crémonien d'ordre fini G, présente les difficultés les plus grandes. L'énumération des groupes linéaires quaternaires d'ordre fini n'a pas encore été faite. M. Jordan (*Journal de Crelle*, t. LXXXIV, et Mémoire couronné par l'Académie de Naples, 1880), après avoir posé les principes de la méthode, ne s'est pas engagé dans une interminable discussion arithmétique, où les hypothèses à examiner successivement se présentaient par milliers. Dans le cas particulier, qui nous intéresse seul, l'équation de contact allège considérablement la discussion qui, néanmoins, reste encore trop fastidieuse pour que je l'aborde, au moins à présent. Je me bornerai à construire G' dans quelques cas particuliers.

Si nous posons, pour abréger,

$$(z\,dz)_{ij} = z_i\,dz_j - z_j\,dz_i \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

l'équation de contact (**42**) peut s'écrire

$$\varpi = (z\,dz)_{12} - (z\,dz)_{34} = 0.$$

Une substitution quadratique birationnelle de la forme

$$s = \begin{vmatrix} x_1 & 2T_1T_4 \\ \dots & \dots\dots \end{vmatrix}$$

[*voir* (**41**)] sera crémonienne si sa directrice s' multiplie ϖ par un facteur constant (**42**).

Au lieu de construire G, nous pouvons construire le groupe $t^{-1}Gt$, t étant une crémonienne quadratique, puisque cela revient à trans-

former par la substitution t tout le plan des éléments (x, u), c'est-à-dire à effectuer dans ce plan un changement de coordonnées curvilignes, lequel n'altère pas les propriétés du groupe G. Donc, *il est licite de transformer le groupe linéaire quaternaire G' par une linéaire quaternaire quelconque t, laquelle a son déterminant* $= 0$ *et multiplie* ϖ *par un facteur constant.*

Passons maintenant à la discussion des cas particuliers.

45. *G' est dérivé de* ρ', ϖ', l'. — Les substitutions de G sont des substitutions Cremona, et G se réduit à un groupe quadratique Cremona du troisième type (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 27 août 1883 et 3 mars 1884; *Journal de Mathématiques*, p. 436; 1885).

46. *On a, dans toutes les monistiques l, les constantes* l_2 *et* l_3 *nulles* (**40**).

Les monistiques l de cette nature forment évidemment un groupe. Une substitution quelconque de G' est, ainsi qu'on s'en assure sur le champ, de la forme

$$s = \begin{array}{ll} z_1 & a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ z_2 & a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \\ z_3 & b_{11}z_3 + b_{12}z_4 \\ z_4 & b_{21}z_3 + b_{22}z_4 \end{array},$$

ou

$$t = \begin{array}{ll} z_1 & c_{11}z_3 + c_{12}z_4 \\ z_2 & c_{21}z_3 + c_{22}z_4 \\ z_3 & d_{11}z_1 + d_{12}z_2 \\ z_4 & d_{21}z_1 + d_{22}z_4 \end{array}.$$

Appelons λ le couple de variables z_1 et z_2, et, de même, μ le couple z_3, z_4. Appelons α, β, ... les binaires

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad \ldots;$$

soient a le déterminant de α, b celui de β, etc.

Les substitutions s' et t' s'écriront symboliquement

$$s' = \begin{vmatrix} \lambda & \alpha[\lambda] \\ \mu & \beta[\mu] \end{vmatrix}, \qquad t' \begin{vmatrix} \lambda & \gamma[\mu] \\ \mu & \delta[\lambda] \end{vmatrix},$$

et l'on vérifiera sans peine que, si l'on a

$$\begin{aligned} s' &= \begin{vmatrix} \lambda & \alpha[\lambda] \\ \mu & \beta[\mu] \end{vmatrix}, & s'_1 &= \begin{vmatrix} \lambda & \alpha_1[\lambda] \\ \mu & \beta_1[\mu] \end{vmatrix}, & &\ldots, \\ t' &= \begin{vmatrix} \lambda & \gamma[\mu] \\ \mu & \delta[\lambda] \end{vmatrix}, & t'_1 &= \begin{vmatrix} \lambda & \gamma_1[\mu] \\ \mu & \delta_1[\lambda] \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

il vient les relations

$$(o) \quad \left\{ \begin{aligned} s'_1 s' &= \begin{vmatrix} \lambda & \alpha_1\alpha[\lambda] \\ \mu & \beta_1\beta[\mu] \end{vmatrix}, & t'_1 t' &= \begin{vmatrix} \lambda & \gamma_1\delta[\mu] \\ \mu & \delta_1\gamma[\mu] \end{vmatrix}, \\ s'^{-1} &= \begin{vmatrix} \lambda & \alpha^{-1}[\lambda] \\ \mu & \beta^{-1}[\mu] \end{vmatrix}, & t'^{-1} &= \begin{vmatrix} \lambda & \delta^{-1}[\mu] \\ \mu & \gamma^{-1}[\lambda] \end{vmatrix}, \\ t's' &= \begin{vmatrix} \lambda & \gamma\beta[\mu] \\ \mu & \delta\alpha[\lambda] \end{vmatrix}, & t'^{-1}s't &= \begin{vmatrix} \lambda & \delta^{-1}\beta\delta[\lambda] \\ \mu & \gamma^{-1}\alpha\gamma[\mu] \end{vmatrix}, \end{aligned} \right.$$

$\alpha_1\alpha$ étant le produit de la substitution binaire α_1 par la binaire α, etc.

De ces relations résultent immédiatement les trois corollaires :

Corollaire I. — *Les substitutions de la forme s', contenues dans G', forment un groupe S' contenu dans G' et permutable à ses substitutions.*

Corollaire II. — *G' résulte de la combinaison de S' avec une seule substitution t'_0, de la forme t', et contient le double des substitutions s' de S'.*

Corollaire III. — *Pour que G' soit d'ordre fini, il faut et il suffit que S' le soit, c'est-à-dire qu'il faut et il suffit que chacun des groupes binaires A, dérivés des α et B, dérivés des β, soit d'ordre fini.*

Les relations (o) indiquent aussi que, si

$$t'_0 = \begin{vmatrix} \lambda & \gamma[\mu] \\ \mu & \delta[\lambda] \end{vmatrix},$$

on a entre les groupes A et B

$$\delta^{-1} B \delta = A, \qquad \gamma^{-1} A \gamma = B.$$

47. Les substitutions s' et t' changent respectivement $\mathfrak{T}$ (**44**) en

$$a(z\,dz)_{12} - b(z\,dz)_{34} \quad \text{et} \quad c(z\,dz)_{34} - d(z\,dz)_{12};$$

d'où, puisque $\mathfrak{T}$ ne change pas (**44**),

$$a = b, \qquad c = d,$$

a étant le déterminant de α, ...

On peut supposer, sans restreindre la généralité, que les déterminants ab de s' et cd de t' sont égaux à l'unité; donc

$$a^2 = b^2 = 1 = c^2 = d^2$$

et enfin

$$a = b = c = d = 1,$$

car, si $b = a = -1$ par exemple, il suffirait de multiplier s' par la substitution

$$(i^4 = 1) \qquad | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \quad iz_1 \quad iz_2 \quad iz_3 \quad iz_4 \; |.$$

Réciproquement on voit sans peine que *toute linéaire quaternaire* de la forme s'

$$s'_0 = \begin{vmatrix} \lambda & \alpha_0[\lambda] \\ \mu & \beta_0[\mu] \end{vmatrix} \qquad \text{avec} \qquad a_0 = b_0 = 1$$

est la directrice d'une quadratique crémonienne s_0.

Les groupes binaires A et B ne diffèrent, comme on vient de le voir, que par le choix des variables, puisque

$$\delta^{-1} B \delta = A \qquad \text{et} \qquad \gamma^{-1} A \gamma = B.$$

Il nous est licite (44) de transformer G' par la substitution s'_0 ci-dessus, dont nous choisirons les coefficients de façon à faire coïncider

$$\alpha_0^{-1} A \alpha_0 \quad \text{et} \quad \beta_0^{-1} B \beta_0$$

avec un même groupe P, convenablement choisi parmi les groupes linéaires binaires d'ordre fini.

Après cette transformation, G' résultera de la combinaison du groupe $s_0'^{-1} S' s'_0 = \Sigma'$ avec la substitution

$$s_0^{-1} t'_0 s_0 = \begin{vmatrix} \lambda & \Gamma[\mu] \\ \mu & \Delta[\lambda] \end{vmatrix}.$$

Le groupe Σ' dérivé de

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mathsf{a}[\lambda] \\ \mu & \mathsf{b}[\mu] \end{vmatrix}$$

sera isomorphe à chacun des groupes

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ \mu & \mathsf{b}[\mu] \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda & \mathsf{a}[\lambda] \\ \mu & \mu \end{vmatrix}$$

et se composera des H^2 substitutions (H étant l'ordre P)

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mathsf{a}[\lambda] \\ \mu & \mathsf{b}[\mu] \end{vmatrix},$$

obtenues en combinant chacune des substitutions a de P avec chacune des substitutions b aussi de P.

Σ' est permutable à $s_0'^{-1} t'_0 s'$ et par suite P est permutable à Γ et à Δ. La transformation de P par Γ équivaut entre les substitutions de P à une certaine substitution $\mathfrak{G}$; si $\mathfrak{G}^m = 1$, Γ^m sera échangeable à toutes les substitutions de P.

Supposons que P n'est pas un faisceau et qu'il est le plus général possible, c'est-à-dire n'est contenu dans aucun autre groupe d'ordre fini. Alors $\Gamma^m = 1$; le groupe dérivé de Γ et de P est d'ordre fini et coïncide avec P, puisque P est général : donc Γ est contenu dans P. Le raison-

nement est le même pour Δ. Ainsi la substitution

$$t'_0 = \begin{vmatrix} \lambda & \Delta^{-1}[\lambda] \\ \mu & \Gamma^{-1}[\mu] \end{vmatrix}$$

figurera dans Σ' et la substitution

$$s_0'^{-1} t'_0 s'_0 \tau'_0 = \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{vmatrix} = \mathfrak{T}'_0$$

se combinera à Σ' pour former G'; il suffira même de combiner $\mathfrak{T}'_0$ avec le groupe

$$\begin{vmatrix} \lambda & a[\lambda] \\ \mu & \mu \end{vmatrix}.$$

Si P est un faisceau, les substitutions de Σ' seront de la forme

$$\sigma' = \begin{vmatrix} \lambda & \alpha[\lambda] \\ \mu & \beta[\mu] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & a z_1 \\ z_2 & a^{-1} z_2 \\ z_3 & b z_3 \\ z_4 & b^{-1} z_4 \end{vmatrix};$$

$$a, \quad b = \text{racines de l'unité},$$

et celles de G' non contenues dans Σ', de la forme

$$\begin{vmatrix} \lambda & \alpha_1 \gamma[\mu] \\ \mu & \beta_1 \delta[\lambda] \end{vmatrix}$$

avec

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \beta_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_1^{-1} \end{pmatrix}; \qquad \gamma, \quad \delta = 1 \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Toute substitution de la forme

$$L' = | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \qquad a z_1 \quad a^{-1} z_2 \quad b z_3 \quad b^{-1} z_4$$

est la directrice de la monistique

$$L = \begin{vmatrix} x_1 & abx_1 \\ x_2 & x_2 \\ x_3 & bx_3 \\ \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

De plus, comme on a

$$\varpi' = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 \\ z_2 & z_3 \\ z_3 & z_2 \\ z_4 & z_1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad e' = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & -z_3 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

on voit que toute substitution de G s'obtient en combinant des monistiques L avec la dualistique e et la canonique ϖ.

En résumé, il vient :

Théorème. — *Si* G *est dérivé des substitutions* ρ, ϖ, e *et*

$$l = \begin{vmatrix} x_1 & l_1 x_1 \\ x_2 & l_2 x_2 \\ x_3 & l_3 x_3 + l'_1 x_2 \\ \dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix},$$

on a constamment $l' = 0$ *et* G *ne contient pas de crémoniennes, mais seulement des crémoniques, dérivées de* ϖ, e, L; *ou bien* G *a pour groupe directeur un groupe* G' *obtenu en combinant*

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_3 & z_4 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

avec un groupe

$$\begin{vmatrix} z_1 & p_{11} z_1 + p_{12} z_2 \\ z_2 & p_{21} z_1 + p_{22} z_2 \\ z_3 & z_3 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

le groupe linéaire binaire

$$\begin{vmatrix} z_1 & p_{11}z_1 + p_{12}z_2 \\ z_2 & p_{21}z_1 + p_{22}z_2 \end{vmatrix}$$

étant d'ordre fini.

48. Si G′ ne contenait pas de substitution déplaçant les couples λ et μ, G′ serait formé de substitutions

$$\begin{vmatrix} \lambda & \alpha[\lambda] \\ \mu & \beta[\mu] \end{vmatrix},$$

où les binaires α et β formeraient des groupes A et B d'ordre fini.

49. *G′ est dérivé de ρ', e' et l'.* On voit sur-le-champ que toute substitution de G′ est de la forme

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{14}z_4 \\ z_2 & a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{24}z_4 \\ z_3 & a_{31}z_1 + a_{32}z_2 + a_{33}z_3 + a_{34}z_4 \\ z_4 & a_{44}z_4 \end{vmatrix}.$$

G′ est donc isomorphe au groupe linéaire ternaire G″, dérivé des substitutions

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{14}z_4 \\ z_2 & a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{24}z_4 \\ z_4 & a_{44}z_4 \end{vmatrix}.$$

Lemme. — G′ est holoédriquement isomorphe à G″.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Soit

$$\sigma' = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 \\ z_2 & z_2 \\ z_3 & b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3 + b_4z_4 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

une substitution de G′ qui correspond à la substitution unité de G″: σ' transforme $\mathfrak{T}$ en

$$(z\,dz)_{12} - b_1(z\,dz)_{14} - b_2(z\,dz)_{24} - b_3(z\,dz)_{34};$$

comme $\mathfrak{T}$ ne doit pas changer, on a

$$b_1 = b_2 = 0, \qquad b_3 = 1;$$

mais alors

$$\sigma' = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 \\ z_2 & z_2 \\ z_3 & z_3 + b_4 z_4 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix}, \qquad \sigma'^m = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 \\ z_2 & z_2 \\ z_3 & z_3 + m b_4 z_4 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix};$$

σ' doit être d'ordre fini : donc $b_4 = 0$, $\sigma' = 1$. C. Q. F. D.

Pour que G soit d'ordre fini, il faut et il suffit par suite que G″ soit d'ordre fini. Ainsi G″ ne diffère que par le choix des variables de l'un des groupes de M. Jordan (*voir* l'énumération, *Journal de l'École Polytechnique*, LIe Cahier, p. 134). D'ailleurs G″ multiplie simplement par un facteur la variable z_4; par suite, G″ appartient au premier type.

50. Lemme. *Dans une substitution*

$$\mathfrak{R}' = \begin{vmatrix} z_1 & p_{11} z_1 + p_{12} z_2 + p_{14} z_4 \\ z_2 & p_{21} z_1 + p_{22} z_2 + p_{24} z_4 \\ z_3 & q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 + q_4 z_4 \\ z_4 & p_{44} z_4 \end{vmatrix},$$

on peut, quels que soient les coefficients p, *déterminer les coefficients q, de façon que $\mathfrak{R}'$ n'altère pas l'équation de contact*

$$\mathfrak{T} = (z\,dz)_{12} - (z\,dz)_{34} = 0.$$

$\mathfrak{R}'$ change $\mathfrak{T}$ en

$$(z\,dz)_{12}\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} + (z\,dz)_{14}\begin{vmatrix} p_{11} & p_{14} \\ p_{21} & p_{24} \end{vmatrix} + (z\,dz)_{24}\begin{vmatrix} p_{12} & p_{14} \\ p_{22} & p_{24} \end{vmatrix}$$
$$- q_1 p_{44}(z\,dz)_{14} - q_2 p_{44}(z\,dz)_{24} - q_3 p_{44}(z\,dz)_{34}.$$

Il suffit donc de faire

$$q_1 p_{44} = p_{11} p_{24} - p_{14} p_{21},$$
$$q_2 p_{44} = p_{12} p_{24} - p_{14} p_{22},$$
$$q_3 p_{44} = p_{14} p_{22} - p_{12} p_{21}.$$

Ce système définit q_1, q_2, q_3, car $p_{44} \neq 0$.

$\mathcal{R}'$ est la directrice d'une crémonienne quadratique $\mathcal{R}$. Il est licite de transformer G par $\mathcal{R}$, c'est-à-dire G′ par $\mathcal{R}'$. Il est possible alors de disposer des coefficients p dans $\mathcal{R}'$ de façon à ramener G″, groupe linéaire ternaire d'ordre fini et du premier type, à sa forme habituelle

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ z_2 & a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \\ z_4 & a_{44} z_4 \end{vmatrix}.$$

Alors G′ est de la forme

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ z_2 & a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \\ z_3 & b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 + b_4 z_4 \\ z_4 & a_{44} z_4 \end{vmatrix}.$$

Les substitutions de G′ changent τ en

$$(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})(z\,dz)_{12}$$
$$- a_{44} b_1 (z\,dz)_{14} - a_{44} b_2 (z\,dz)_{24} - a_{44} b_3 (z\,dz)_{34};$$

donc $b_1 = b_2 = 0$, et nous sommes ramenés à un cas déjà étudié (**46** à **49**).

Sur les composantes des accélérations d'ordre quelconque suivant trois directions rectangulaires variables;

PAR M. PH. GILBERT.

Ce problème, en ce qui concerne l'accélération du *second* ordre et ses projections sur la tangente, la normale principale et la *binormale* à la trajectoire, a été traité géométriquement par M. Resal [1] et par M. Schell [2]; pour les accélérations d'ordre quelconque, analytiquement par Bouquet [3] et par Somoff [4]. La méthode facile et sûre que nous proposons ici s'applique à ce problème et à d'autres plus généraux.

1. Considérons un point mobile M, et soit M_n son *index* d'ordre quelconque n par rapport à une origine fixe O, c'est-à-dire que le rayon vecteur OM_n représente en grandeur et en direction l'accélération d'ordre n, j_n, du point M.

(1) *Traité de Cinématique pure*, p. 269.
(2) *Theorie der Bewegung und Kräfte*, t. I, p. 544.
(3) *Annales de l'École Normale*, p. 147; 1874.
(4) *Mémoire sur les accélérations de divers ordres* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, 7e série, t. VIII).

Soient

$Oxyz$ un système d'axes rectangulaires mobile suivant une loi quelconque autour du point O;

p, q, r les composantes de la rotation de ce système suivant les directions Ox, Oy, Oz;

j_{nx}, j_{ny}, j_{nz} les composantes de l'accélération j_n, qui sont en même temps les coordonnées de M_n.

La vitesse absolue du point M_n représente, en grandeur et en direction, l'accélération d'ordre $n+1$ du point M; or, cette vitesse est la résultante de la vitesse *relative* de M_n par rapport aux axes mobiles, et de sa vitesse d'*entraînement* due à la rotation du système $Oxyz$ autour du point O. Il en résulte immédiatement les formules générales

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} j_{n+1,x} &= \frac{dj_{nx}}{dt} + qj_{nz} - rj_{ny},\\ j_{n+1,y} &= \frac{dj_{ny}}{dt} + rj_{nx} - pj_{nz},\\ j_{n+1,z} &= \frac{dj_{nz}}{dt} + pj_{ny} - qj_{nx},\end{aligned}\right.$$

qui servent de base à tout ce qui suit.

2. Prenons d'abord, pour la direction Ox, celle du rayon vecteur $OM = u$ du point mobile; pour Oz la normale à la surface conique décrite par ce rayon vecteur, élevée du côté du plan tangent vers lequel le cône tourne sa convexité; pour Oy la perpendiculaire au plan xz, menée du côté où la rotation de Oz vers Ox paraît se faire de gauche à droite. Si nous nommons ω la vitesse angulaire du rayon u autour de Oz, prise avec le signe $+$ ou le signe $-$ selon qu'elle est dirigée de gauche à droite ou de droite à gauche par rapport à Oz; R le rayon de courbure de la section du cône normale à OM à la distance 1 du point O, on verra sans peine que l'on a ici

$$p = -\frac{\omega}{R},\qquad q = 0,\qquad r = \omega.$$

Les formules (1) deviendront

$$(2)\qquad \begin{cases} j_{n+1,x} = \dfrac{dj_{nx}}{dt} - \omega j_{ny}, \\ j_{n+1,y} = \dfrac{dj_{ny}}{dt} + \omega j_{nx} + \dfrac{\omega}{R} j_{nz}, \\ j_{n+1,z} = \dfrac{dj_{nz}}{dt} - \dfrac{\omega}{R} j_{ny}, \end{cases}$$

et permettront de calculer de proche en proche les composantes cherchées. En effet, pour $n = 0$, j_n se confond avec la vitesse du point M; on a, comme on sait,

$$j_{0x} = \frac{du}{dt}, \qquad j_{0y} = \omega u, \qquad j_{0z} = 0;$$

les équations (2) donneront les composantes de l'accélération j_1 ou j du premier ordre, savoir

$$(3)\qquad \begin{cases} j_x = \dfrac{d^2 u}{dt^2} - \omega^2 u, \\ j_y = 2\omega \dfrac{du}{dt} + u \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{1}{u} \dfrac{d.\omega u^2}{dt}, \\ j_z = -\dfrac{\omega^2 u}{R}. \end{cases}$$

On déduirait de celles-ci les composantes j_{2x}, j_{2y}, j_{2z} de la suraccélération, et ainsi de suite. Ces formules sont commodes lorsque le mobile reste sur une surface conique donnée, par exemple, sur un cône de révolution dont le sommet est O et l'angle d'ouverture 2α; on a alors

$$R = \operatorname{tang} \alpha.$$

Si le mouvement a lieu dans un plan, $R = \infty$ et j_z est nul.

2. Comme deuxième application, cherchons les composantes de l'accélération j_{n+1} parallèlement à la vitesse, à la normale principale et à la binormale. Prenant respectivement, dans les équations (1), les

directions Ox, Oy et Oz parallèles à ces trois directions, nous remarquerons que l'intersection de deux plans osculateurs infiniment voisins coïncide avec la tangente à la trajectoire, en sorte que, pour amener le trièdre $Oxyz$ dans la position infiniment voisine, on le fera tourner autour de l'arête Ox d'un angle égal à l'angle de torsion $\frac{ds}{T}$ et autour de l'arête Oz d'un angle égal à l'angle de contingence $\frac{ds}{R}$ de la trajectoire. On aura donc, v étant la vitesse de M,

$$p = \frac{v}{T}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{v}{R},$$

et les formules (1) nous donneront

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} j_{n+1,x} &= \frac{dj_{nx}}{dt} - \frac{v}{R} j_{ny}, \\ j_{n+1,y} &= \frac{dj_{ny}}{dt} + \frac{v}{R} j_{nx} - \frac{v}{T} j_{nz}, \\ j_{n+1,z} &= \frac{dj_{nz}}{dt} + \frac{v}{T} j_{ny}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules, que Somoff a obtenues par une voie beaucoup moins simple, serviront à passer des composantes tangentielle, normale et binormale de l'accélération j_n à celles de l'accélération d'ordre $n+1$. Si l'on part de $n = 0$, $j_0 = v$, on a évidemment

$$j_{0x} = v, \qquad j_{0y} = 0, \qquad j_{0z} = 0;$$

d'où, par les formules (4),

$$j_{1x} = \frac{dv}{dt}, \qquad j_{1y} = \frac{v^2}{R}, \qquad j_{1z} = 0,$$

ce qui donne les composantes connues de l'accélération. De même, on trouvera pour les composantes de la suraccélération

$$j_{2x} = \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{v^3}{R^2},$$

$$j_{2y} = \frac{3v}{R}\frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{R^2}\frac{dR}{ds},$$

$$j_{2z} = \frac{v^3}{RT}.$$

Ce sont les formules dues à M. Resal. On trouve de même, en faisant $n = 2$ dans les formules (4) et observant que $\frac{ds}{dt} = v$,

$$j_{3x} = \frac{d^3 v}{dt^3} - \frac{6v^2}{R^2}\frac{dv}{dt} + \frac{3v^4}{R^3}\frac{dR}{ds},$$

$$j_{3y} = \frac{4v}{R}\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{3}{R}\frac{dv^2}{dt^2} - \frac{6v^2}{R^2}\frac{dv}{dt}\frac{dR}{ds} - \frac{v^4}{R^3}\left(1 + \frac{R^2}{T^2} - \frac{dR^2}{ds^2} + R\frac{d^2R}{ds^2}\right),$$

$$j_{3z} = \frac{6v^2}{RT}\frac{dv}{dt} - \frac{v^4}{RT}\left(\frac{2}{R}\frac{dR}{ds} + \frac{1}{T}\frac{dT}{ds}\right),$$

et ainsi de suite. Lorsqu'on suppose le mouvement uniforme, ce qu'on peut toujours faire lorsqu'on a en vue les applications géométriques, $\frac{dv}{dt}, \frac{d^2v}{dt^2}, \ldots$ s'annulent, ce qui simplifie beaucoup ces formules.

5. Comme dernière application des équations (1), supposons le point M déterminé par un système de coordonnées curvilignes composé de trois groupes de surfaces orthogonales, caractérisés par les paramètres λ_1, λ_2, λ_3, et cherchons les composantes de j_{n-1} parallèlement aux normales Mn_1, Mn_2, Mn_3 aux trois surfaces qui se coupent en M, menées dans le sens où les paramètres λ_1, λ_2, λ_3 vont en croissant.

Nous désignerons par R_{ik} le rayon de courbure de la section principale de la surface λ_i qui est tangente à la direction Mn_k, pris avec le signe *positif* ou *négatif*, selon qu'il est dirigé dans le sens où λ_i va en *décroissant* ou en *croissant*.

Le trièdre O123 ayant ses arêtes respectives parallèles aux normales Mn_1, Mn_2, Mn_3, pour trouver les composantes p, q, r de sa rotation suivant O1, O2, O3, il suffira d'observer : 1° que le déplacement infiniment petit du point M dans le temps dt peut être regardé comme résultant de trois déplacements simultanés ds_1, ds_2, ds_3 suivant les directions Mn_1, Mn_2, Mn_3; 2° que, dans chacun d'eux, par exemple dans le déplacement ds_1, en vertu du théorème de Dupin, la normale à la surface λ_2 reste dans le plan tangent à la surface λ_3, et la normale à la surface λ_3 dans le plan tangent à la surface λ_2. Il en résulte que le déplacement angulaire du trièdre $Mn_1n_2n_3$ résulte d'une rotation autour de Mn_3, égale à $-\frac{ds_1}{R_{21}}$, et d'une rotation autour de Mn_2 égale à

$\frac{ds_1}{R_{31}}$, eu égard à la convention sur le signe de R_{ik} et à la disposition des arêtes Mn_1, Mn_2, Mn_3. En opérant de la même manière sur les deux autres mouvements ds_2, ds_3 du point M, désignant par v_1, v_2, v_3 les vitesses du point M parallèles aux directions O1, O2, O3, on aura évidemment, pour les valeurs cherchées de p, q, r,

$$p = -\frac{v_2}{R_{32}} + \frac{v_3}{R_{23}}, \qquad q = -\frac{v_3}{R_{13}} + \frac{v_1}{R_{31}}, \qquad r = -\frac{v_1}{R_{21}} + \frac{v_2}{R_{12}},$$

et les formules (1) nous donneront, pour les composantes cherchées de l'accélération j_{n+1},

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} j_{n+1,1} &= \frac{dj_{n1}}{dt} + \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right) j_{n3} - \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right) j_{n2}, \\ j_{n+1,2} &= \frac{dj_{n2}}{dt} + \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right) j_{n1} - \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right) j_{n3}, \\ j_{n+1,3} &= \frac{dj_{n3}}{dt} + \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right) j_{n2} - \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right) j_{n1}. \end{aligned} \right.$$

Pour $n = 0$, j_{n1}, j_{n2}, j_{n3} se réduisent respectivement aux vitesses v_1, v_2, v_3, et l'on obtient les composantes de l'accélération j_1 ou j du premier ordre, données par Lamé, mais par une voie beaucoup plus longue,

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} j_1 &= \frac{dv_1}{dt} + \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right) v_3 - \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right) v_2, \\ j_2 &= \frac{dv_2}{dt} + \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right) v_1 - \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right) v_3, \\ j_3 &= \frac{dv_3}{dt} + \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right) v_2 - \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right) v_1. \end{aligned} \right.$$

On en déduirait, en faisant $n = 1$ dans les équations (5), les composantes de l'accélération du second ordre, et ainsi de suite.

On peut, dans les équations (5), introduire au lieu des vitesses v et des rayons R les paramètres des surfaces orthogonales, en désignant par h_1, h_2, h_3 les *paramètres différentiels* du premier ordre définis

par l'équation

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial z}\right)^2}.$$

On a les relations connues [1]

$$ds_i = \frac{d\lambda_i}{h_i}, \qquad \frac{1}{R_{ik}} = -\frac{h_i}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial \lambda_i},$$

et de simples substitutions donneront

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
j_{n+1,1} &= \frac{dj_{n1}}{dt} + \left(\frac{h_1}{h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial \lambda_1}\frac{d\lambda_2}{dt} - \frac{h_2}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial \lambda_2}\frac{d\lambda_1}{dt}\right) j_{n2} \\
&\quad + \left(\frac{h_1}{h_3^2}\frac{\partial h_3}{\partial \lambda_1}\frac{d\lambda_3}{dt} - \frac{h_3}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial \lambda_3}\frac{d\lambda_1}{dt}\right) j_{n3}, \\
j_{n+1,2} &= \frac{dj_{n2}}{dt} + \left(\frac{h_2}{h_3^2}\frac{\partial h_3}{\partial \lambda_2}\frac{d\lambda_3}{dt} - \frac{h_3}{h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial \lambda_3}\frac{d\lambda_2}{dt}\right) j_{n3} \\
&\quad + \left(\frac{h_2}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial \lambda_2}\frac{d\lambda_1}{dt} - \frac{h_1}{h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial \lambda_1}\frac{d\lambda_2}{dt}\right) j_{n1}, \\
j_{n+1,3} &= \frac{dj_{n3}}{dt} + \left(\frac{h_3}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial \lambda_3}\frac{d\lambda_1}{dt} - \frac{h_1}{h_3^2}\frac{\partial h_3}{\partial \lambda_1}\frac{d\lambda_3}{dt}\right) j_{n1} \\
&\quad + \left(\frac{h_3}{h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial \lambda_3}\frac{d\lambda_2}{dt} - \frac{h_2}{h_3^2}\frac{\partial h_3}{\partial \lambda_2}\frac{d\lambda_3}{dt}\right) j_{n2}.
\end{aligned}\right.$$

Pour $n = 0$, on retrouverait les formules de Guiraudet [2] et Lamé [3].

4. Nous appliquerons les formules (6) au système de coordonnées sphériques composé des sphères de rayon r, des cônes de révolution dont l'ouverture est 2θ, et des plans passant par l'axe des cônes et faisant un angle ψ avec un plan fixe. Attribuant l'indice 1 aux sphères, l'indice 2 aux cônes, l'indice 3 aux plans, on trouvera ici, par des con-

---

(1) Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, p. 51.
(2) *Mémoires de la Société des Sciences de Lille*, 1865.
(3) *Leçons sur les coordonnées curvilignes.*

sidérations géométriques directes,

$$ds_1 = dr, \qquad ds_2 = r\,d\theta, \qquad ds_3 = r\sin\theta\,d\psi.$$

ce qui donnera les valeurs de c_1, c_2, c_3; puis

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{r}, \qquad \frac{1}{R_{13}} = \frac{1}{r}, \qquad \frac{1}{R_{21}} = 0,$$

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{r\,\mathrm{tang}\,\theta}, \qquad \frac{1}{R_{31}} = 0, \qquad \frac{1}{R_{32}} = 0.$$

Substituant dans les équations (5), on trouvera

$$(8) \qquad \begin{cases} j_{n+1,r} = \dfrac{dj_{nr}}{dt} - j_{n\theta}\dfrac{d\theta}{dt} - j_{n\psi}\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt}, \\ j_{n+1,\theta} = \dfrac{dj_{n\theta}}{dt} + j_{nr}\dfrac{d\theta}{dt} - j_{n\psi}\cos\theta\dfrac{d\psi}{dt}, \\ j_{n+1,\psi} = \dfrac{dj_{n\psi}}{dt} + j_{nr}\sin\theta\dfrac{d\psi}{dt} + j_{n\theta}\cos\theta\dfrac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

Pour $n = 0$, on a

$$j_{0r} = c_r = \frac{dr}{dt}, \qquad j_{0\theta} = r\frac{d\theta}{dt}, \qquad j_{0\psi} = r\sin\theta\frac{d\psi}{dt},$$

d'où

$$(9) \qquad \begin{cases} j_r = \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\dfrac{d\theta^2}{dt^2} - r\sin^2\theta\dfrac{d\psi^2}{dt^2}, \\ j_\theta = r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} - r\sin\theta\cos\theta\dfrac{d\psi^2}{dt^2}, \\ j_\psi = r\sin\theta\dfrac{d^2\psi}{dt^2} + 2\sin\theta\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\psi}{dt} + 2r\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{d\psi}{dt}, \end{cases}$$

ce qui s'accorde avec les formules de Guiraudet et Lamé. De même, on trouverait, pour les composantes sphériques de la suraccélération,

en faisant $n = 1$ dans les formules (8) et réduisant,

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
j_{2r} &= \frac{d^3 r}{dt^3} - 3\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right) \\
&\quad - 3\sin\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\frac{d.r\sin\theta}{dt} - 3r\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d^2\psi}{dt^2}, \\
j_{2\theta} &= r\frac{d^3\theta}{dt^3} + 3\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right) \\
&\quad - 3r\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d^2\psi}{dt^2} - r\frac{d\theta^3}{dt^3} - 3\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\frac{d.r\sin\theta}{dt}. \\
j_{2\psi} &= r\sin\theta\frac{d^3\psi}{dt^3} + 3\frac{d^2\psi}{dt^2}\frac{d.r\sin\theta}{dt} \\
&\quad + 3\frac{d\psi}{dt}\left(\sin\theta\frac{d^2 r}{dt^2} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) - r\sin\theta\frac{d\psi^3}{dt^3} \\
&\quad + 6\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt} - 3r\sin\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta^2}{dt^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les formules se compliquent rapidement. Lorsque, dans les équations (8), on suppose ψ constamment égal à zéro, on obtient les formules données par M. Laisant [1]. L'application aux coordonnées elliptiques ne souffre aucune difficulté, mais elle ne nous a pas paru conduire à des résultats spécialement intéressants.

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 496; 1878.

TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME IV.

Pages.

Sur le mouvement d'un solide dans un liquide; par M. *G.-H. Halphen* ... 5

Sur quelques formules d'Analyse utiles dans la Théorie des nombres; par le P. *Pepin*, S. J. ... 83

Sur les courbes cycliques de direction; par M. *G. Humbert* ... 129

Sur les courbes algébriques planes rectifiables; par M. *G. Humbert* ... 133

Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (seconde Partie); par M. *H. Hugoniot* ... 153

Sur la résolution, par les *fonctions* hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique; par M. *F. Klein* (de Gœttingue). Extrait d'une Lettre adressée à M. *C. Jordan* ... 169

Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien. *Premier Mémoire :* Etude d'une substitution crémonienne isolée; par M. *Léon Autonne* ... 177

Lettre adressée à M. *Hermite;* par M. *David Hilbert* ... 249

Sur les équations les plus générales de la double réfraction compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel; par M. *Maurice Lévy*, Membre de l'Institut ... 257

Pages.

Sur quelques propriétés des aires sphériques; par M. *G. Humbert* 313

Sur les transformations d'une forme quadratique en elle-même; par M. *Camille Jordan* 349

Sur un Théorème d'Électrodynamique; par M. *P. Duhem* 369

Recherches sur les groupes quadratiques crémoniens d'ordre fini. *Second Mémoire :* Multiplication des crémoniennes, groupes quadratiques; groupe directeur; par M. *Léon Autonne* 407

Sur les composantes des accélérations d'ordre quelconque suivant trois directions rectangulaires; par M. *G. Gilbert* 465

FIN DU TOME IV DE LA QUATRIÈME SÉRIE.

(1928) PARIS. IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

QA
1
J684
sér.4
t.4

Journal de mathématiques
purés et appliquées

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY